

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Analiza danych

Jan Kozłowski

Losowe zbiory Cantora

Praca dyplomowa
napisana pod kierunkiem
dr. Piotra Dyszewskiego

Wrocław 2023

§1 Wstęp

Spotykając się po raz pierwszy ze zbiorem Cantora poznajemy go przez następującą konstrukcję: weźmy odcinek $[0, 1]$, usuńmy z niego odcinek $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ dostając zbiór C_1 . W drugim kroku w obu składowych zbioru C_1 czyli $[0, \frac{1}{3}]$ oraz $[\frac{2}{3}, 1]$ usuwamy ich środki długości $\frac{1}{3}$ ich długości dostając zbiór C_2 . Tę operację powtarzamy dostając ciąg zbiorów $(C_n)_{n \geq 1}$, z którego możemy stworzyć zbiór Cantora wzorem

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{i \geq 1} C_i.$$

Zauważmy, że możemy w inny sposób wybierać jaką część danego przedziału usuwamy, nie musi być to jedna trzecia. Możemy dla przedziału $[a, b]$ wylosować niezależnie dwie liczby z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \frac{b-a}{2}]$, a następnie podzielić go na dwa przedziały $[a, x]$ i $[b - y, b]$ i proces ten powtarzać otrzymując nowy (losowy) zbiór Cantora. Pierwszym pytaniem, które powinniśmy sobie zadać jest to, czy ten zbiór spełnia definicję zbioru Cantora, i czy możemy o nim powiedzieć coś jeszcze.



Rysunek 1: Losowa konstrukcja zbioru Cantora

Tematem pracy jest opisanie konstrukcji i udowodnienie własności losowych zbiorów Cantora. Rozdział pierwszy wprowadza potrzebne definicje. W drugim udowodnimy, że podana konstrukcja rzeczywiście jest zbiorem Cantora. W rozdziale trzecim udowodnimy twierdzenie o wymiarze Hausdorffa takiego losowego zbioru. Na końcu przeprowadzimy konstrukcję kilku przykładowych zbiorów wraz z policzeniem ich wymiaru Hausdorffa.

Praca oparta jest na rozdziałach 5.1 oraz 5.2 z podręcznika [1], oraz na [2].

§2 Pojęcia wstępne

2.1 Definicje

Do pracy z losowymi zbiorami Cantora będziemy potrzebować kilku definicji. Na potrzeby tej pracy spójrzmy na losowy zbiór w sposób analogiczny do "zwykłej" zmiennej losowej.

Definicja 2.1. Niech D , to zbiór zwartych podzbiorów $\mathbb{R}^m$, a $(\Omega, \mathbb{P}, \mathfrak{F})$ to przestrzeń probabilistyczna. Funkcję $X : \Omega \rightarrow D$ nazwiemy losowym zbiorem, jeśli dla każdego $d \in D$ mamy $X^{-1}(d) \in \mathfrak{F}$.

Definicja 2.2. Powiemy, że dwa zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ są do siebie geometrycznie podobne, jeśli jeden z nich można przekształcić w drugi za pomocą translacji, odbicia rotacji oraz przeskalowania.

Definicja 2.3. Zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^m$ nazwiemy zbiorem Cantora, jeśli jest zwarty, domknięty, wszędzie gęsty oraz miary zero.

Na potrzeby przyszłych rozważań niech $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ to zbiór ciągów składających się z liczb naturalnych (gdzie $\mathbb{N}^0 = \emptyset$). Dla $n \in \mathbb{N}^*$ niech $|n|$ oznacza długość tego ciągu. Dodatkowo, niech $*$ oznacza konkatencję dwóch ciągów, czyli na przykład $(1, 3, 4) * (5, 6) = (1, 3, 4, 5, 6)$, a $2 * (3, 4, 5) = (2, 3, 4, 5)$, a $v|k$ oznacza pierwsze k elementów ciągu v . Mając te oznaczenia możemy zdefiniować losowy zbiór Cantora:

Definicja 2.4 (Losowy zbiór Cantora). Niech J to niepusty zwarty podzbiór $\mathbb{R}^m$, taki że $\lambda(\text{Int}(J)) = \lambda(J) > 0$, gdzie λ oznacza m -wymiarową miarę Lebesgue'a. Załóżmy, że mamy rodzinę losowych podzbiorów $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{J} = \{J_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^*\},$$

spełniających następujące właściwości:

Założenie 1. $J_\emptyset(\omega) = J$ dla prawie każdej $\omega \in \Omega$. Dodatkowo dla każdej $\sigma \in \mathbb{N}^*$ oraz dla prawie każdej $\omega \in \Omega$ jeśli $J_\sigma(\omega)$ jest niepusty, to jest on geometrycznie podobny do J .

Założenie 2. Dla prawie każdego $\omega \in \Omega$ i każdego $\sigma \in \mathbb{N}^*$ elementy ciągu $\{J_{\sigma*i}(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ mają własność taką, że ich wnętrza są parami nieprzecinające się oraz

$$\lambda(J_\sigma(\omega) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_{\sigma*i}(\omega)) > 0.$$

Założenie 3. Niech

$$T_{\sigma*n}(\omega) := \frac{\text{diam}(J_{\sigma*n}(\omega))}{\text{diam}(J_\sigma(\omega))},$$

gdzie diam oznacza średnicę zbioru. Oznaczmy $T_\emptyset(\omega) = \text{diam}(J)$. Zakładamy, że ciąg $\tau_\sigma = \{T_{\sigma*i}(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ jest i.i.d.

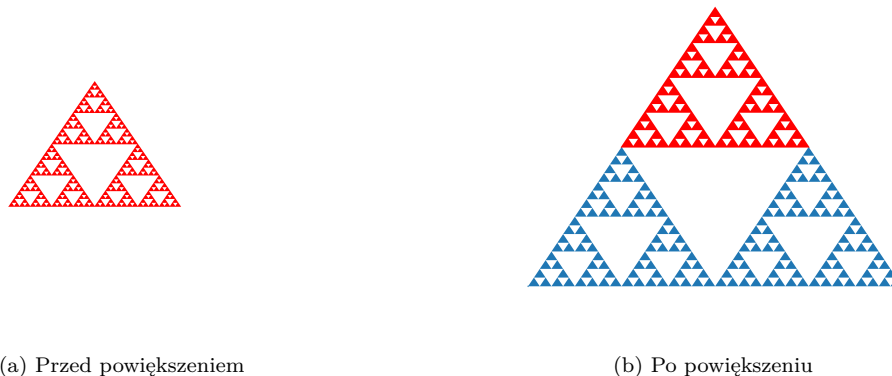
Wtedy możemy zdefiniować losowy zbiór Cantora

$$K(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^n} J_\sigma(\omega).$$

2.2 Wymiar Hausdorffa

Intuicyjnie wymiar obiektu możemy zdefiniować następująco: jeśli jest równy n , to znaczy, że gdy w tym obiekcie zwiększymy każdy bok dwukrotnie, to "zmieści się w nim" 2^n nieprzeskalowanych obiektów. Dla kwadratu, gdy każdy bok zwiększymy dwukrotnie, to pole zwiększy się 2^2 krotnie. Jednak tę intuicję przenieśliśmy na fraktale, to doszlibyśmy do zaskakujących wyników.

Rozważmy to na przykładzie trójkąta Sierpińskiego. Możemy go skonstruować w następujący sposób: weźmy trójkąt równoboczny, podzielmy go na cztery przystające trójkąty równoboczne i usuńmy środkowy z nich. Następnie procedurę wycinania powtórzmy na pozostałych trójkątach. Zastanówmy się teraz, co się stanie, gdy w tym trójkącie Sierpińskiego zwiększylibyśmy długość boku dwukrotnie.



Rysunek 2: Trójkąt Sierpińskiego

Widzimy, że w powiększonym dwukrotnie trójkącie możemy zmieścić 3 mniejsze, czyli, że zgodnie z intuicją wymiar byłby równy $\log_2(3)$, czyli nie byłby liczbą ani całkowitą ani nawet wymierną!

Dla badania wymiarów fraktali będziemy więc używać nowej definicji wymiaru:

Definicja 2.5. Funkcję $\mathcal{H}_\theta^m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, \infty]$ o wzorze

$$\mathcal{H}_\theta^m(A) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^\theta : (A_n)_{n \geq 1} \text{ to } \epsilon\text{-pokrycie } A \right\}$$

nazywamy θ -wymiarową (zewnątrzną) miarą Hausdorffa, gdzie $(A_n)_{n \geq 1}$ to ϵ -pokrycie A , jeżeli $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$ oraz dla każdego n , $\text{diam}(A_n) < \epsilon$.

Definicja 2.6. Dla zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^m$ definiujemy jego wymiar Hausdorffa $\dim_H A \in [0, \infty]$ jako jedyną liczbę taką, że dla $\theta < \dim_H A$ mamy $\mathcal{H}_\theta^m(A) = \infty$, a dla $\theta > \dim_H A$ mamy $\mathcal{H}_\theta^m(A) = 0$.

§3 Własności losowych zbiorów Cantora

Na konstrukcję naszego losowego zbioru Cantora możemy patrzeć, jak na proces gałązkowy Galtona-Watsona, gdzie n -te pokolenie to liczba niepustych zbiorów J_v gdzie $|v| = n$, dodatkowo możemy każdej gałęzi przyporządkować stosunek średnic, to znaczy gałęzi z J_v do J_{v*i} przyporządkowujemy wartość T_{v*i} . Zauważmy, że jeśli średnia liczba potomków w tym procesie jest mniejsza lub równa 1, to proces prawie na pewno wymrze, co w naszej konstrukcji oznaczałoby, że przekrój byłby prawie na pewno pusty. Dlatego dodajmy jeszcze jedno założenie do naszej konstrukcji:

Założenie 4.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{J_i \neq \emptyset}\right] > 1.$$

Mając to założenie wiemy, że z dodatnim prawdopodobieństwem, w każdym pokoleniu będzie niepusty zbiór J_v .

Zacznijmy od obserwacji, że losowy zbiór Cantora pod warunkiem, że jest niepusty to spełnia definicję zbioru Cantora. Jako że jesteśmy w przestrzeni metrycznej, takiej że $X = \mathbb{R}^m$, to zbiór J jest domknięty i ograniczony (ponieważ jest zwarty), dodatkowo dla dowolnego $\sigma \in \mathbb{N}^*$ zbiór J_σ jest geometrycznie podobny do J , więc ma takie same własności topologiczne. Dla dowolnego n skończona suma $\bigcup_{|\sigma|=n} J_\sigma$ zbiorów domkniętych jest domknięta, łącząc to z faktem, że przeliczany przekrój zbiorów domkniętych jest domknięty, to zbiór $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^n} J_\sigma$ jest domknięty, ale jest też ograniczony przez J , więc jest też zwarty.

Zajmijmy się teraz brakiem punktów izolowanych. Ustalmy dowolny $x \in K$ oraz $\epsilon > 0$. Możemy znaleźć ciąg świadczący o tym, że $x \in K$, czyli $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, takie że dla każdego $k \geq 1$ mamy $x \in J_{\sigma|k}$. Poniżej udowodnimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(J_{\sigma|n}) = 0, \quad (**)$$

więc istnieje k_1 , takie że $\text{diam}(J_{\sigma|k_1}) < \epsilon$. Dla każdego $k \geq k_1$ zbiór $J_{\sigma|k}$ ma dodatkową szansę mieć innego potomka niż $J_{\sigma|(k+1)}$ a ten potomek niezerową szansę, że jako nowy proces gałązkowy nie wygaśnie (z założenia 3 i 4), czyli skoro dzieje się to dla nieskończenie wielu k to musi istnieć $v \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, takie że $v|k_1 = \sigma|k_1$, $v \neq \sigma$ oraz istnieje $y \in \bigcap_{i \geq 1} J_{v|i}$. Wtedy $y \in K$, $x \neq y$ oraz odległość pomiędzy x a y jest mniejsza niż ϵ , ponieważ oba należą do $J_{\sigma|k_1}$, czyli x nie jest punktem izolowanym zbioru K .

Ostatnią własnością naszego zbioru, którą musimy udowodnić jest to, że jego miara Lebesgue'a wynosi zero. Do tego będziemy potrzebować kilku oznaczeń. Niech dla $v \in \mathbb{N}^*$ mamy $L(v) = \prod_{i=1}^{|v|} T_{v|i}$. Na $L(v)$ możemy patrzeć jak na iloczyn liczb, które odwiedzimy idąc po drzewie od korzenia do wierzchołka J_v , ale pamiętając, że $T_{v*i} = \frac{\text{diam}(J_{v*i})}{\text{diam}(J_v)}$ otrzymujemy $L(v) = \frac{\text{diam}(J_v)}{\text{diam}(J)}$. Dodatkowo niech

$$Y_{\theta,n} = \sum_{|v|=n} L(v)^\theta.$$

Chcielibyśmy znaleźć martyngał związany z $Y_{\theta,n}$ z naturalną filtracją $\mathcal{F}_n = \sigma(\{J_v : |v| \leq n\})$. Policzmy warunkową wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}[Y_{\theta,n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n+1} L(v)^\theta | \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_{v*i})^\theta}{\text{diam}(J_v)^\theta} | \mathcal{F}_n\right].$$

Z addytywności warunkowej wartości oczekiwanej możemy z nią wejść pod znak zewnętrznej sumy.

$$\mathbb{E}[Y_{\theta,n+1} | \mathcal{F}_n] = \sum_{|v|=n} \mathbb{E}\left[\frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_{v*i})^\theta}{\text{diam}(J_v)^\theta} | \mathcal{F}_n\right].$$

Zauważmy, że dla $|v| = n$ zmienna $\frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta}$ jest $\mathcal{F}_n$ -mierzalna, a suma indeksowana po

i jest niezależna od $\mathcal{F}_n$ z założenia 3, więc

$$\mathbb{E}[Y_{\theta,n+1}|\mathcal{F}_n] = \sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_{v*i})^\theta}{\text{diam}(J_v)^\theta}\right] = Y_{\theta,n} \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_i)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta}\right],$$

gdzie ostatnia równość wynika z identyczności rozkładu wektora $(T_i)_{i=1}^\infty$. Oznaczmy $\Phi(\theta) = \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_i)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} T_i^\theta\right]$. Wtedy $\Phi(\theta)^{-n} Y_{\theta,n}$ jest nieujemnym martyngałem, więc z twierdzenia Doob'a jest zbieżny. Przyjrzyjmy się bliżej $\Phi(\theta)$.

Zacznijmy od lematu

Lemat 3.1. *Dla dowolnych geometrycznie podobnych $A, B \in \mathbb{R}^m$, takich że $\lambda(B) \neq 0$ mamy*

$$\frac{\lambda(A)}{\lambda(B)} = \frac{\text{diam}(A)^m}{\text{diam}(B)^m}.$$

Dowód. Skoro A, B są geometrycznie podobne, to możemy znaleźć takie B' , że $\lambda(B) = \lambda(B')$, $\text{diam}(B) = \text{diam}(B')$, B' można uzyskać z B za pomocą translacji, odbicia i rotacji, oraz istnieje $\delta \in \mathbb{R}$, taka że $\delta B' := \{\delta b : b \in B'\} = A$. Wtedy z własności m -wymiarowej miary Lebesgue'a otrzymujemy $\lambda(A) = \delta^m \lambda(B')$, dodatkowo mamy $\text{diam}(\delta B') = \delta \text{diam}(B')$ i łącząc dwie ostatnie równości dostajemy tezę. ■

Niech $\theta = m$ oszacujmy sumę

$$\sum_{i \geq 1} T_i^m = \sum_{i \geq 1} \frac{\text{diam}(J_i)^m}{\text{diam}(J)^m} = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda(J_i)}{\lambda(J)} = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda(\text{Int}(J_i))}{\lambda(\text{Int}(J))},$$

gdzie ostatnia równość wynika z naszego założenia, że $\lambda(J) = \lambda(\text{Int}(J))$, a J_i jest geometrycznie podobny do J . Następnie korzystając z tego, że wnętrza J_i są parami rozłączne mamy

$$\sum_{i \geq 1} T_i^m = \frac{\lambda(\bigcup_{i \geq 1} \text{Int}(J_i))}{\lambda(\text{Int}(J))} < 1$$

z założenia 2. Wtedy również mamy $\Phi(\theta) < 1$, ponieważ jeśli zmienna losowa $X \leq 1$ prawie wszędzie, to $\mathbb{E}[X] \leq 1$. Wróćmy teraz do naszego martyngału i zauważmy, że z **lematu** otrzymujemy, że

$$L(v)^m = \frac{\text{diam}(J_v)^m}{\text{diam}(J)^m} = \frac{\lambda(J_v)}{\lambda(J)},$$

więc wtedy

$$Y_{m,n} = \sum_{|v|=n} \frac{\lambda(J_v)}{\lambda(J)} \geq \frac{\lambda(\bigcup_{|v|=n} J_v)}{\lambda(J)}.$$

Pokażemy teraz, że $Y_{m,n}$ dąży do 0 przy $n \rightarrow \infty$, co pociąga (★★). Na początek policzmy granicę $\mathbb{E}[Y_{m,n}]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_{m,n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(m)^n \mathbb{E}[\Phi(m)^{-n} Y_{m,n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(m)^n \mathbb{E}[\Phi(m)^0 Y_{m,0}] = 0,$$

ponieważ martyngały mają stałą średnią, a $\Phi(m) < 1$. Ale $Y_{\theta,n}$ jest nieujemne, więc również $Y_{m,n}$ dąży do zera prawie na pewno. Wtedy z twierdzenia o trzech ciągach

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\bigcup_{|v|=n} J_v) = 0$ prawie na pewno, a wtedy mamy

$$\lambda(K) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{|v|=n} J_v\right) = 0,$$

co kończy dowód zerowej miary losowego zbioru Cantora.

§4 Twierdzenie o wymiarze losowego zbioru Cantora

Przejdźmy teraz do głównego twierdzenia dotyczącego wymiaru Hausdorffa

Twierdzenie 4.1 (R. Daniel Mauldin, S. C. Williams [2]). *Dla oznaczeń z poprzedniego rozdziału zdefiniujmy α jako*

$$\alpha = \inf\{\theta \geq 0 : \Phi(\theta) \leq 1\}.$$

Wtedy $\alpha \leq m$ oraz

$$P(\dim_H K = \alpha | K \neq \emptyset) = 1.$$

Dowód. Tutaj udowodnimy prostszą część dowodu to znaczy nierówność $\dim_H K \leq \alpha$. Drugą część można znaleźć w [2] oraz [1]. Na początku przypomnijmy, że $\Phi(m) < 1$, więc mamy $\alpha \leq m$. Jako że T_i jest mniejsze od 1, to dla $\theta \in [\alpha, m]$ mamy $\Phi(\theta) < 1$. Dla takich θ mamy również

$$Y_{\theta,n} = \sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^\theta}{\text{diam}(J)^\theta} \leq \sum_{|v|=n} \frac{\text{diam}(J_v)^m}{\text{diam}(J)^m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

więc $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\theta,n} = 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\lambda(J) = 1$. Przypomnijmy teraz wzór na miarę Hausdorffa

$$\mathcal{H}_\theta^m(A) = \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^\theta : (A_n)_{n \geq 1} \text{ to } \epsilon\text{-pokrycie } A \right\}.$$

Ustalmy $\epsilon > 0$. Naszym kandydatem na ϵ -pokrycie zbioru K jest $(J_v)_{|v|=n}$. Jako że $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\theta,n} = 0$ to znajdziemy takie n_0 , że $Y_{\theta,n_0} < \epsilon$. Wtedy dla każdego $|v| = n_0$ mamy $L(v) < \epsilon$, więc znaleźliśmy pokrycie świadczące o tym, że

$$\mathcal{H}_\theta^m(K) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|v|=n} \text{diam}(J_v)^\theta,$$

ale gdy $\theta \leq \alpha$ mamy $\Phi(\theta) < 1$, a wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|v|=n} \text{diam}(J_v)^\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\theta,n} = 0,$$

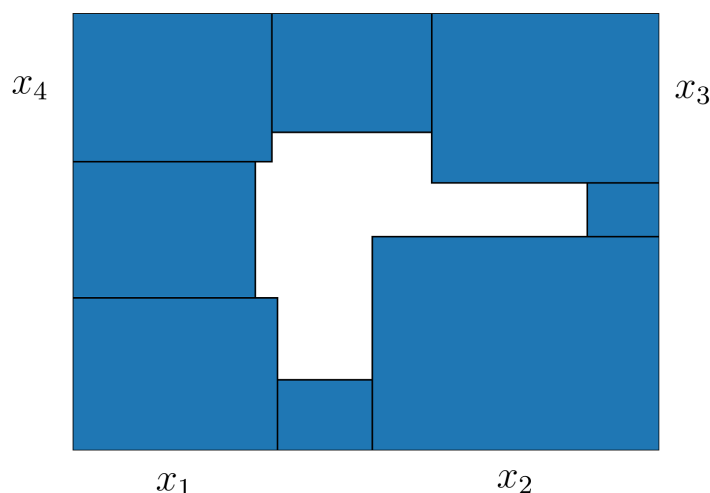
co pokazuje, że $\dim_H K \leq \alpha$. ■

§5 Przykłady

5.1 Losowy dywan Sierpińskiego

Zajmijmy się stworzeniem kilku losowych zbiorów Cantora. Zwykły (deterministyczny) dywan Sierpińskiego, to fraktal o następującej konstrukcji: weźmy kwadrat, podzielmy go na 9 mniejszych równych kwadratów (umieszczonych w 3 rzędach), oraz usuńmy środkowy z nich. Ten proces powtarzamy na mniejszych kwadratach. Konstrukcję tę można urozmaicić dodając do niej element losowy.

Zacznijmy od kwadratu o długości 1. Niezależnie wylosujemy 4 liczby x_1, x_2, x_3, x_4 z rozkładu jednostajnego na przedziale $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Na wierzchołkach kwadratu zaznaczmy kwadraty o długościach x_1, x_2, x_3, x_4 . Następnie pomiędzy tymi kwadratami zaznaczamy kwadraty tak, by zajęły całą długość boków kwadratu. Tak powstają nam kwadraty $J_1, J_2, \dots, J_8$.



Rysunek 3: Pierwsza iteracja losowego dywanu Sierpińskiego

Możemy się zastanawiać, dlaczego liczby x_1, x_2, x_3, x_4 musimy losować z takiego przedziału. Wtedy wartość $1 - (x_1 + x_2)$, czyli długość boków "małych kwadratów" należy do przedziału $[0, \frac{1}{3}]$, czyli wiemy, że ten mały kwadrat będzie istniał i nie pokryje się z żadnym innym kwadratem.

Użyjmy teraz naszego twierdzenia o wymiarze losowego zbioru Cantora, do zbadania wymiaru tego zbioru. Zauważmy, że z niezależności losowań x_1, x_2, x_3, x_4 mamy $\mathbb{E}[T_1^\alpha] = \mathbb{E}[T_2^\alpha] = \mathbb{E}[T_3^\alpha] = \mathbb{E}[T_4^\alpha]$ oraz $\mathbb{E}[T_5^\alpha] = \mathbb{E}[T_6^\alpha] = \mathbb{E}[T_7^\alpha] = \mathbb{E}[T_8^\alpha]$ dlatego

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^8 \mathbb{E}[T_i^\alpha] = 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + 4 \mathbb{E}[T_5^\alpha].$$

Pochylny się nad wyliczeniem $\mathbb{E}[T_1^\alpha]$. Średnica kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$, więc $T_1^\alpha = (\frac{x_1\sqrt{2}}{\sqrt{2}})^\alpha = x_1^\alpha$, dlatego

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = \mathbb{E}[x_1^\alpha] = \int x^\alpha f_1(x) dx,$$

gdzie $f_1(x) = 6\mathbb{1}_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})}(x)$ jest gęstością rozkładu x_1 ,

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = 6 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha dx = 6 \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\alpha+1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} \right].$$

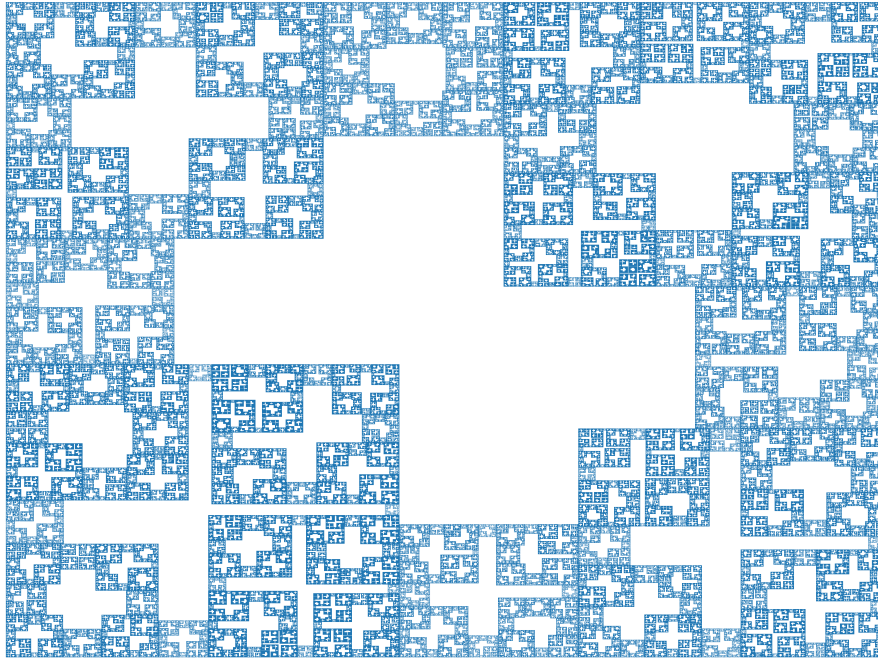
Teraz spójrzmy na $\mathbb{E}[T_5^\alpha]$, w tym przypadku długość boku wynosi $1 - (x_1 + x_2)$, więc $T_5^\alpha = \left(\frac{(1-(x_1+x_2))\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^\alpha = (1 - (x_1 + x_2))^\alpha$. Losowania x_1 i x_2 są niezależne, więc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_5^\alpha] &= \int \int (1 - (x + y))^\alpha f_1(x) f_2(y) dy dx = 36 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (1 - (x + y))^\alpha dy dx \\ &= 36 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\alpha+1} \left[(1 - (x + y))^{\alpha+1} \right]_{y=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} dx = 36 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\alpha+1} \left[\left(\frac{1}{2} - x\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{2}{3} - x\right)^{\alpha+1} \right] dx \\ &= 36 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\left(\frac{1}{2} - x\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{2}{3} - x\right)^{\alpha+2} \right]_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 36 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[-\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} \right] \\ &= 36 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right]. \end{aligned}$$

Teraz możemy policzyć $\Phi(\alpha)$:

$$\Phi(\alpha) = \frac{24}{\alpha+1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} + \frac{6}{\alpha+2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right] \right].$$

Niestety nie możemy obliczyć algebraicznie, kiedy $\Phi(\alpha) = 1$, ale przybliżając rozwiązanie numeryczne otrzymujemy $\alpha \approx 1.7826$



Rysunek 4: Losowy dywan Sierpińskiego

5.2 Wielowymiarowy losowy dywan Sierpińskiego

Zastanówmy się teraz nad analogiczną konstrukcją, tym razem zacznijmy od n -wymiarowego sześcianu (hipersześcianu) o krawędzi długości 1. Taki hipersześcian ma 2^n wierzchołków. Wylosujemy niezależnie 2^n liczb z rozkładu jednostajnego na przedziale $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ i przy każdym wierzchołku narysujemy hipersześcian o takiej długości. Następnie dorysujemy hipersześciany tak, aby każda krawędź zawierała się w brzegu jakiegoś hipersześcianu. Policzmy liczbę takich "mniejszych" hipersześcianów: mamy 2^n wierzchołków, z każdego wychodzi n krawędzi, czyli łącznie będzie ich $n \cdot 2^n$, ponieważ każda krawędź należy do dwóch wierzchołków. Teraz możemy policzyć $\Phi(\alpha)$ analogicznie do poprzedniego przykładu:

$$\Phi(\alpha) = 2^n \mathbb{E}[T_1^\alpha] + 2^{n-1} n \mathbb{E}[T_2^\alpha],$$

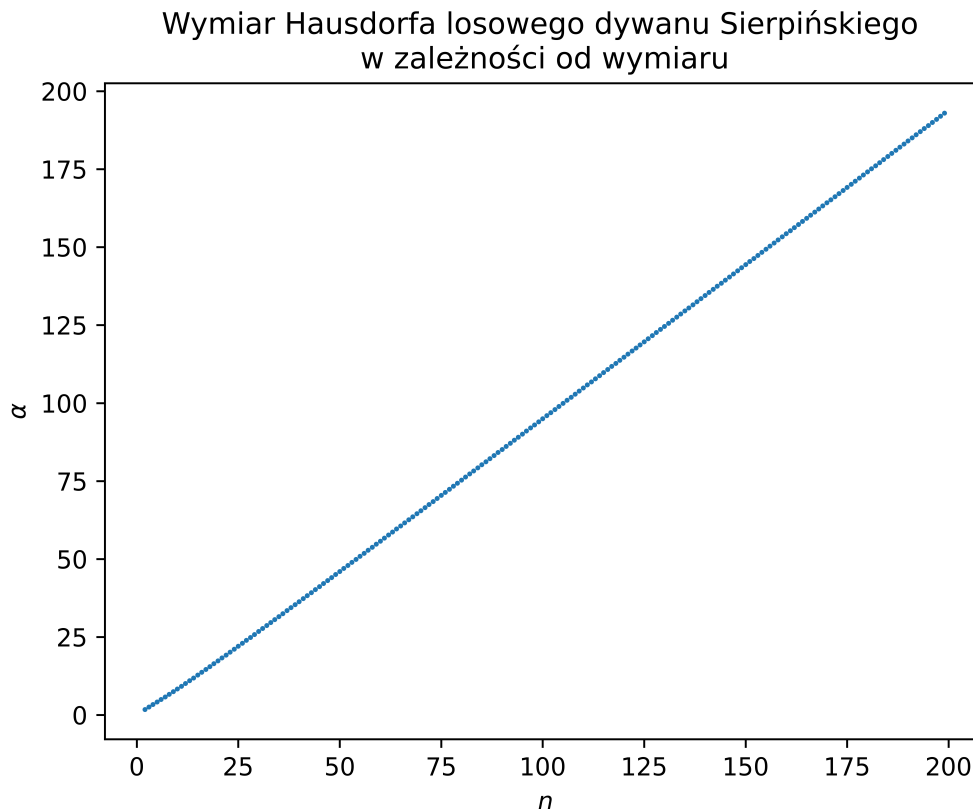
gdzie T_1 to stosunek średnich hipersześcianów przy wierzchołkach, a T_2 "małych" hipersześcianów. Czyli tak, jak poprzednio

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = \frac{6}{\alpha+1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} \right],$$

$$\mathbb{E}[T_2^\alpha] = 36 \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right],$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{6 \cdot 2^n}{\alpha + 1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+1} + \frac{3 \cdot 2^n}{\alpha + 2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha+2} \right] \right].$$

Tutaj tym bardziej nie możemy znaleźć dokładnych wartości i musimy posilkować się przybliżeniami



Rysunek 5: Wymiar Hausdorffa losowego dywanu Sierpińskiego

Zastanawiająca jest liniowa zależność pomiędzy tymi wartościami. Spróbujmy ją udowodnić w przypadku deterministycznym dywanu Sierpińskiego. Tutaj z racji, że dzielimy na równe hipersześciany, to $T_1^\alpha = T_2^\alpha = \frac{1}{3^\alpha}$, mamy więc równanie

$$2^n \frac{1}{3^\alpha} + n 2^{n-1} \frac{1}{3^\alpha} = 1$$

$$2^{n-1}(2+n) = 3^\alpha$$

$$\log_3(2^{n-1}) + \log_3(2+n) = \alpha$$

$$\alpha = n \log_3(2) - \log_3(2) + \log_3(2+n).$$

Widzimy, że nie jest to zależność liniowa, ale licząc granice $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\alpha}{n} = \log_3(2)$ otrzymujemy, że jest to asymptotyczna liniowość.

5.3 Jednostajny kwadrat

Rozważmy teraz inny przykład tworzenia zbioru Cantora. Ustalmy liczbę $p \in (0, 1)$. Podzielmy nasz kwadrat na 9 równych części i każdą z nich niezależnie od innych wy-

tnijmy z prawdopodobieństwem $1 - p$. Następnie na każdym z pozostałych kwadratów powtórzmy tę operację dzielenia i usuwania. Zastanówmy się nad wymiarem Hausdorffa tego fraktala, ale najpierw zauważmy, że $\mathbb{E}[T_1] = \dots = \mathbb{E}[T_9]$, oraz że

$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = p \frac{1}{3^\alpha},$$

dlatego

$$\Phi(\alpha) = 9p \frac{1}{3^\alpha}.$$

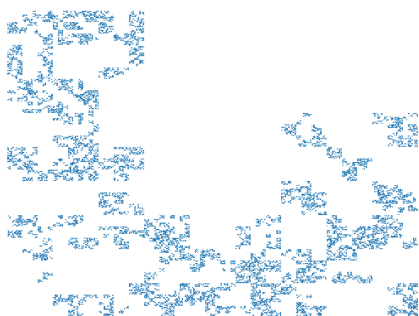
Stąd już możemy wyznaczyć dokładną wartość wymiaru Hausdorffa:

$$1 = 9p \frac{1}{3^\alpha}$$

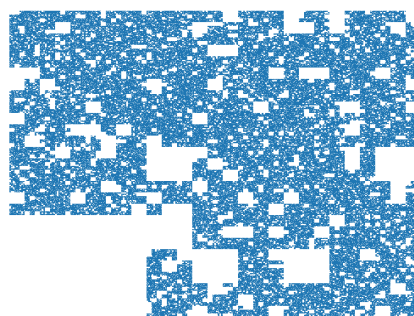
$$3^\alpha = 9p$$

$$\alpha = \log_3(p) + 2.$$

Zauważmy, że tą konstrukcją możemy stworzyć zbiór o dowolnym wymiarze Hausdorffa. Może zastanawiać fakt, że dla wartości p bliskich zeru wartość α byłaby ujemna, jednak zauważmy, że gdy $p \leq \frac{1}{9}$, to $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^9 T_i^0] \leq 1$ co jest sprzeczne z założeniem 4.



(a) Wymiar 1.6



(b) Wymiar 1.9

Rysunek 6: Zbiory o różnych wymiarach Hausdorffa

5.4 Losowy dywan Sierpińskiego z losową liczbą kwadratów

Wróćmy teraz do przykładu 5.1, jednak dodajmy losową liczbę kwadratów: niech X to zmienna z rozkładem Poissona z parametrem $\lambda = 2$. Podczas każdego dzielenia kwadratu, gdy już jest podzielony na 8 części zostawmy 4 "duże" kwadraty przy rogach oraz $(X)_4 + 1$ "małych" kwadratów, gdzie $(\cdot)_4$ oznacza resztę z dzielenia przez 4. Pozostałe kwadraty usuńmy w taki sposób, by zostały kwadraty zaczynając od dolnego i idąc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Zauważmy, że to, które z czterech małych kwadratów usuniemy, nie wpływa na wymiar Hausdorffa tego zbioru. Przy liczeniu $\Phi(\alpha)$ musimy uwzględnić tę różną ilość kwadratów, pamiętając, że $P(X = k) = \frac{e^{-2} 2^k}{k!}$:

$$\Phi(\alpha) = 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=0}^{\infty} P[X = 4j + i - 1] i \mathbb{E}[T_5^\alpha]$$

$$= \sum_{i=1}^4 i \mathbb{E}[T_5^\alpha] e^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{4j+i-1}}{(4j+i-1)!}.$$

Gdzie T_1 i T_5 to oznaczenia z przykładu 5.1. Przyjrzyjmy się teraz wewnętrznej sumie. Do obliczenia tych sum potrzebne nam będą rozwinięcia w szeregi potęgowe funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots, \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots, \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots, \\ \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots.\end{aligned}$$

Gdy $i = 1$ nasza suma ma postać

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{4j}}{(4j)!} = 1 + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{12}}{12!} + \dots,$$

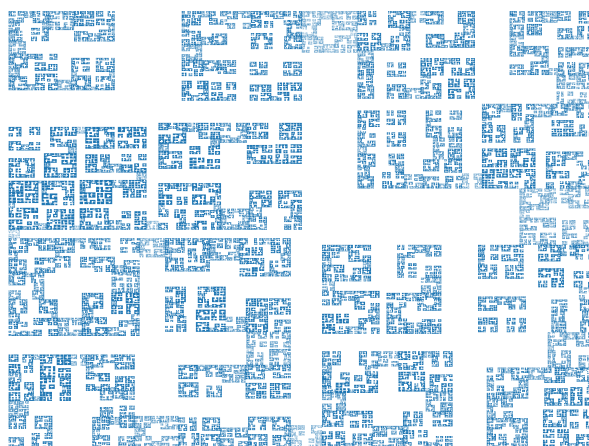
co korzystając z powyższych rozwinięć można zapisać jako $\frac{1}{2}(\cos(2) + \cosh(2))$. Gdy $i = 2$ to

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{4j+1}}{(4j+1)!} = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{13}}{13!} + \dots = \frac{1}{2}(\sin(2) + \sinh(2)).$$

Podobnie możemy policzyć dwie pozostałe sumy. Teraz możemy wrócić do obliczania wymiaru Hausdorffa:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + \frac{e^{-2}}{2} \mathbb{E}[T_5^\alpha] \left((\cos(2) + \cosh(2)) + 2(\sin(2) + \sinh(2)) + \right. \\ &\quad \left. + 3(\cosh(2) - \cos(2)) + 4(\sinh(2) - \sin(2)) \right) \\ &= 4 \mathbb{E}[T_1^\alpha] + e^{-2} \mathbb{E}[T_5^\alpha] \left(2 \cosh(2) - \cos(2) + 3 \sinh(2) - \sin(2) \right).\end{aligned}$$

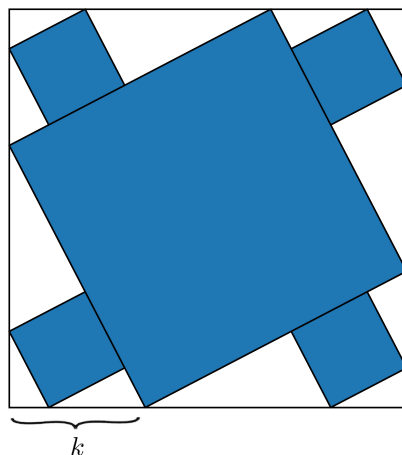
Tutaj też, by obliczyć rozwiązanie $\Phi(\alpha) = 1$ musimy się zadowolić przybliżeniem numerycznym $\alpha \approx 1.738307$.



Rysunek 7: Losowy dywan Sierpińskiego z losową liczbą kwadratów

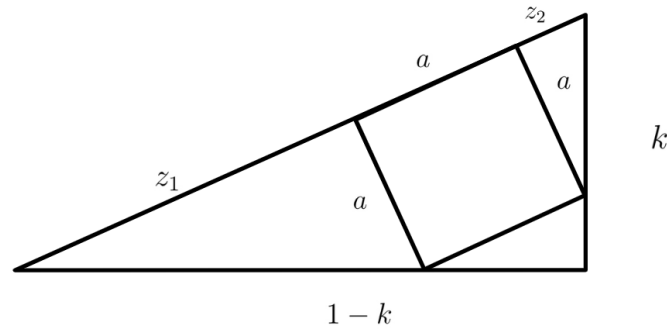
5.5 Losowo obracający się kwadrat

Znów zaczniemy od kwadratu J o długości 1, wylosujemy jedną liczbę k z rozkładu $U[0, \frac{1}{2}]$. Wpiszmy teraz w ten kwadrat inny kwadrat J_1 tak, by odległość pomiędzy najbliższymi wierzchołkami obu kwadratów była równa k . Powstaną nam wtedy na rogach cztery trójkąty prostokątne, wpiszmy w nie kwadraty tak, by miały wspólny bok z przeciwprostokątną tego trójkąta dostając zbiory J_2, J_3, J_4, J_5 . Operację tę powtarzamy dla wszystkich J_n .



Rysunek 8: Konstrukcja losowo obracającego się kwadratu

By móc policzyć wymiar Hausdorffa tego zbioru musimy policzyć długości boków większego i mniejszego kwadratu. Z twierdzenia pitagorasa długość większego jest równa $\sqrt{2k^2 - 2k + 1}$, by obliczyć długość mniejszego spójrzmy na rysunek



Rysunek 9: Dolny trójkąt losowo obracającego się kwadratu

Korzystając z podobieństwa trójkątów możemy napisać równania

$$\frac{z_1}{a} = \frac{1-k}{k}, \quad \frac{z_2}{a} = \frac{k}{1-k}.$$

Wtedy wraz z tym, że $z_1 + z_2 + a = \sqrt{2k^2 - 2k + 1}$ dostajemy

$$a = \frac{\sqrt{2k^2 - 2k + 1}}{1 + \frac{1-k}{k} + \frac{k}{1-k}}.$$

Policzymy teraz wartości oczekiwane zmiennych T_1^α oraz T_2^α

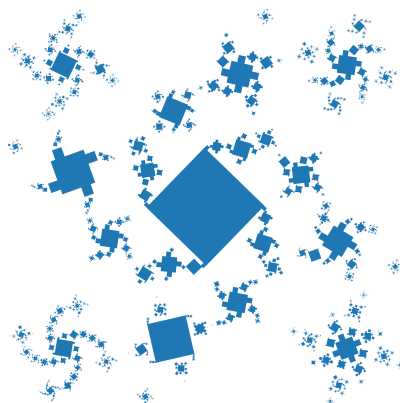
$$\mathbb{E}[T_1^\alpha] = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 2x + 1}^\alpha dx,$$

$$\mathbb{E}[T_2^\alpha] = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{2k^2 - 2k + 1}}{1 + \frac{1-k}{k} + \frac{k}{1-k}} \right)^\alpha dx.$$

Dodakowo zauważmy, że $\mathbb{E}[T_2^\alpha] = \mathbb{E}[T_3^\alpha] = \mathbb{E}[T_4^\alpha] = \mathbb{E}[T_5^\alpha]$. Niestety nie możemy policzyć tych całek, dlatego możemy jedynie przybliżyć rozwiązanie równania

$$\Phi(\alpha) = \mathbb{E}[T_1^\alpha] + 4 \mathbb{E}[T_2^\alpha] = 1.$$

Dostając, że przybliżona wartość wymiaru Hausdorffa jest równa 1.520099.



Rysunek 10: Losowo obracający się kwadrat

Literatura

- [1] G. Alsmeyer *Random Recursive Equations and Their Distributional Fixed Points*
- [2] R. Daniel Mauldin and S. C. Williams *Random Recursive Constructions: Asymptotic Geometric and Topological Properties*