Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Matematyka nauczycielska

Wiktoria Kawnik

Języki Dycka i ich funkcje tworzące

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dr. hab. Wojciecha Młotkowskiego

Wrocław 2023

Spis treści

Wstęp

Praca poświęcona jest ścieżkom Dycka na płaszczyźnie. Rozdział pierwszy przedstawia interpretację tego pojęcia, bazującą na artykule M.T.L. Bizleya, w którym ścieżki Dycka zdefiniowane są jako ścieżki na punktach kratowych płaszczyzny, spełniające określone warunki. Czytelnik pozna wzór Grossmana–Bizleya, opisujący liczbę takich ścieżek, a następnie związek między nimi a liczbami Catalana oraz liczbami Fussa – Catalana. Ten punkt widzenia został jednak już szeroko zbadany, dlatego w tej pracy skupimy się na mniej znanym podejściu, opartym na badaniach P. Duchona, opisanych w artykule „*On the enumeration and generation of generalized Dyck words*".

Rozdział drugi jest wprowadzeniem do języków Dycka, przy czym ścieżki Dycka reprezentowane są jako słowa. Terminologia oraz oznaczenia są zaczerpnięte z pracy P. Duchona, w której przeanalizowany jest przypadek dwuliterowego alfabetu $\{a, b\}$ gdzie litera a ma waluację 3, a litera b waluację -2. W pracy dyplomowej Weroniki Domaszewskiej „*Uogólnione ścieżki Dycka na płaszczyźnie*" zostaje szczegółowo zbadany przypadek, gdy waluacje liter są odpowiednio równe 5 oraz -2.

W tej pracy skupimy się na słowach wolnych od faktorów w językach Dycka. Analizujemy przypadki, gdy a ma waluacje 3,5,7, a b ma waluację -2. Celem rozważań jest wyznaczenie równań, które spełniają funkcje tworzące. W ostatnim rozdziale badamy przypadek, gdy waluacja litery a jest nieparzystą liczbą dodatnią, a waluacją b wynosi -2. Zostaje przedstawiony wzór ogólny, opisujący funkcje tworzące.

Rozdział 1

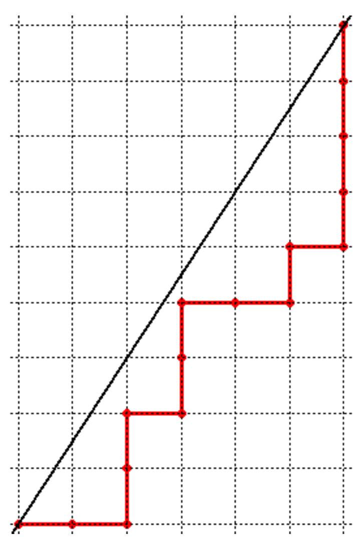
Ścieżki Dycka

Niech m oraz n będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Ciąg punktów płaszczyzny $(P_0, P_1, ..., P_l)$ postaci $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych x_i, y_i całkowitych, gdzie $l \leqslant 0$, będziemy nazywać *ścieżkami Dycka*, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. $x_0 = y_0 = 0$,
2. $x_i = x_{i-1} + 1$, $y_i = y_{i-1}$ (krok wschodni, który będziemy oznaczać przez E) lub $x_i = x_{i-1}$, $y_i = y_{i-1} + 1$ (krok północny, który oznaczymy symbolem N), dla $1 \leqslant i \leqslant l$,
3. $my_i \leqslant nx_i$, dla $1 \leqslant i \leqslant l$.

Jeśli $my_l = nx_l$, przy czym m i n są liczbami względnie pierwszymi, to istnieje taka liczba naturalna k, że $x_l = km$ oraz $y_l = kn$, wówczas punkt P_l jest postaci (km, kn).

Przykład 1.1. *Załóżmy, że $m = 3$, $n = 2$. Wówczas ciąg $EENNENNEENENNNN$ jest przykładem ścieżki Dycka dla $k = 3$.*



Rysunek 1.1: Ścieżka Dycka dla $m = 2$, $n = 3$ oraz $k = 3$.

Liczbę takich dróg opisuje wzór:

$$\phi_k = \sum \frac{F_1^{k_1} F_2^{k_2} ...}{k_1! k_2! ...}, \tag{1.1}$$

gdzie

$$F_j = \frac{1}{j(m+n)} \binom{jm+jn}{jm},$$

przy czym suma przebiega przez wszystkie $k_i \in \mathbb{N}$, takie, że:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = k.$$

Formuła (1.1) została zaproponowana w 1950 roku przez H. Grossmana. Dowód przedstawił M. T. L. Bizley w artykule „*Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from* $(0,0)$ *to* (km, kn) *having just* t *contacts with the line* $my = nx$ *and having no points above this line; and a proof of Grossman's formula for the number of paths which may touch but do not rise above this line*" z 1954 roku.

W przypadku gdy $n = 1$, ścieżki Dycka rozpoczynają się w punkcie $(0,0)$, a kończą w (km, k), przy czym spełniony jest warunek $my_i \leqslant x_i$. Aby dowiedzieć się, ile jest takich dróg, możemy skorzystać z odpowiedniej liczby Fussa - Catalana, która jest postaci:

$$\frac{1}{km+1} \binom{km+1}{k}.$$

Natomiast jeżeli rozważmy przypadek, gdy $m = n = 1$, wtedy liczbę ścieżek z punktu $(0,0)$ do punktu (k,k), pozostających poniżej przekątnej $y = x$, wyraża k-ta liczba Catalana, którą opisuje wzór:

$$C_k = \frac{1}{2k+1} \binom{2k+1}{k}.$$

Ścieżki Dycka możemy przedstawić również jako ścieżki złożone z kroków północno - wschodnich postaci $(1, m)$, które będziemy oznaczać przez NE oraz południowo - wschodnich postaci $(1, -n)$, oznaczonych symbolem SE. Wówczas droga rozpoczyna się w punkcie $(0,0)$, a kończy w punkcie $(km + kn, 0)$ i pozostaje powyżej prostej $y = 0$.

Rozdział 2

Języki Dycka

W dalszej części pracy rozważamy inną interpretację ścieżek Dycka opartą na pracy P. Duchona „*On the enumeration and generation of generalized Dyck words*” z roku 2000.

Niech U będzie skończonym zbiorem, który nazwiemy *alfabetem*. Zdefiniujmy U^* jako zbiór wszystkich słów postaci $w_1 w_2 ... w_n$, takich, że $n \geqslant 0$ oraz $w_k \in U$. W przypadku gdy $n = 0$ otrzymujemy słowo puste, które będziemy oznaczać symbolem ϵ.

Faktorem słowa w jest dowolne słowo $\widetilde{w}$ takie, że $w = w_L \widetilde{w} w_P$. Jeżeli w_L lub w_P nie jest słowem pustym, to $\widetilde{w}$ nazywamy *faktorem właściwym* słowa w. Ponadto, jeżeli $w_L = \epsilon$ (odpowiednio $w_P = \epsilon$), to $\widetilde{w}$ określamy jako *lewy faktor* (odpowiednio *prawy faktor*).

Waluacją będziemy nazywać każdą funkcję $h : U \to \mathbb{Z}$. Wtedy dla słowa postaci $w = w_1 w_2 ... w_n \in U^*$ definiujemy jego waluację:

$$h(w) := h(w_1) + h(w_2) + ... + h(w_n).$$

W szczególności $h(\epsilon) = 0$.

Definicja 2.1. *Uogólniony język Dycka stowarzyszony z alfabetem U i waluacją h, oznaczony jako $D_{U,h}$ definiujemy jako zbiór słów $w = w_1 w_2 ... w_n \in U^*$ spełniających warunki:*

1. $h(w) = 0$,
2. $h(w_1 w_2 ... w_l) \geqslant 0$, *gdzie* $1 \leqslant l < n$.

Przykład 2.2. *Niech $U = \{a, b\}$ oraz $h(a) = 3$ i $h(b) = -2$. Wtedy słowo:*

$$w = aabbabbaababbbb = a^2 b^2 a^1 b^2 a^2 b^1 a^1 b^4,$$

należy do zbioru $D_{U,h}$, ponieważ $h(w) = 0$ i każdy niepusty lewy faktor słowa w ma nieujemną waluacje.

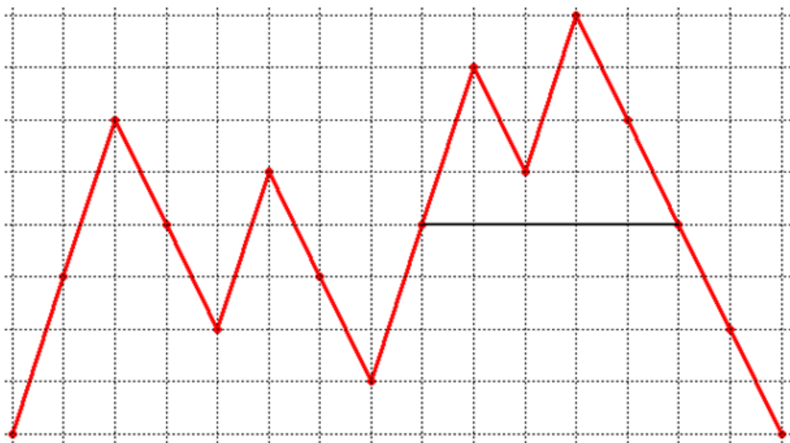
Definicja 2.3. *Słowem wolnym od faktorów będziemy nazywać takie słowo w, dla którego żaden faktor właściwy nie należy do $D_{U,h}$. Jeśli $A \subseteq U^*$ to $\widetilde{A}$ będzie oznaczać zbiór tych $w \in A$, które są wolne od faktorów.*

Przykład 2.4. *Niech $U = \{a, b\}$ oraz $h(a) = 3$ i $h(b) = -2$, wówczas słowo postaci $w = aabbb$ jest wolne od faktorów.*

Przykład 2.5. *Słowo $w = aabbabba(ababb)bb$ z przykładu 2.2 możemy zapisać jako $w = w_L\widetilde{w}w_P$, gdzie $\widetilde{w} = ababb$. Faktor właściwy $\widetilde{w}$ należy do zbioru $D_{U,h}$, zatem słowo w nie jest wolne od faktorów.*

Słowo w z przykładu 2.2 oraz 2.5 zostało graficznie przedstawione na rysunku 1.1 jako ścieżka Dycka o krokach postaci E oraz N, która rozpoczyna się w punkcie $(0, 0)$ i kończy w punkcie $(6, 8)$ oraz pozostaje poniżej prostej o równaniu $2y = 3x$.

W dalszej części pracy będziemy rozważać zbiór słów napisanych za pomocą dwuliterowego alfabetu $U = \{a, b\}$ z waluacją $h(a) = m$ oraz $h(b) = -n$, gdzie m i n to względnie pierwsze dodatnie liczby naturalne. Wówczas słowo $w \in U^*$ możemy przedstawić graficznie jako ścieżka Dycka o krokach północno-wschodnich oraz południowo-wschodnich. Wtedy litera a odpowiada krokowi NE postaci $(1, m)$, natomiast litera b stanowi krok SE, który jest postaci $(1, -n)$.



Rysunek 2.1: Ścieżka Dycka dla słowa $w = aabbabba(ababb)bb$, gdzie $h(a) = 3$, $h(b) = \ 2$.

Własność 2.6. *Jeśli $w \in U^*$ oraz $h(w) = 0$, to długość słowa w wynosi $k(m + n)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Niech N_a oznacza liczbę liter a w słowie w, natomiast N_b – liczbę liter b w słowie w. Skoro prawdziwa jest równość $h(w) = 0$, to $N_a m = N_b n$. Ponadto, wiemy, że m i n to względnie pierwsze liczby dodatnie, zatem istnieje taka liczba $k \in \mathbb{N}$, że $N_a = kn$ oraz $N_b = km$. Wówczas długość słowa w jest równa:

$$N_a + N_b = kn + km = k(m + n),$$

co kończy dowód. □

Definicja 2.7. *Zbiór $\widetilde{L}_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$, definiujemy jako zbiór słów wolnych od faktorów postaci $w = w_1 w_2 ... w_k \in U^*$ spełniających warunki:*

1. $h(w) = i$,
2. $h(w_1 w_2 ... w_l) > i$, *gdzie* $1 \leqslant l < k$.

Definicja 2.8. *Zbiór $\widetilde{R}_j$, gdzie $1 \leqslant j \leqslant n$, definiujemy jako zbiór słów wolnych od faktorów postaci $w = w_1 w_2 ... w_k \in U^*$ spełniających warunki:*

1. *$h(w) = -j$,*
2. *$h(w_1 w_2 ... w_l) > 0$, gdzie $1 \leqslant l < k$.*

Zbiór $\widetilde{L}_i$ reprezentują ścieżki wolne od faktorów, które zaczynają się w $(0, 0)$ i kończą na prostej $y = i$, przy czym nie istnieje krok kończący się na tej linii lub pod nią przed ostatnim krokiem. Natomiast zbiór $\widetilde{R}_j$ jest zbiorem ścieżek wolnych od faktorów, które rozpoczynają się w $(0, 0)$ i kończą na prostej $y = -j$, bez kroku kończącego się na lub przechodzącego poniżej linii $y = 0$ przed ostatnim krokiem.

Warto zwrócić uwagę, że $\widetilde{L}_m$ to jednoelementowy zbiór, składający się z jednoliterowego słowa a, natomiast $\widetilde{R}_n$ jest zbiorem postaci $\{b\}$.

Twierdzenie 2.9. *Jeżeli słowo w należy do zbioru $\widetilde{D}_{U,h}$, to $w = \epsilon$ lub istnieje dokładnie jedna liczba naturalna $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$ taka, że $w = uv$, gdzie $u \in \widetilde{L}_k$ i $v \in \widetilde{R}_k$.*

Dowód. Załóżmy, że w jest niepustym słowem, takim że $w \in \widetilde{D}_{U,h}$. Niech $w = w_1 w_2, w_3 ... w_l$, dla $l > 0$, oraz:

$$k := \min\{h(w_1, w_2, w_3, ..., w_i) : 1 \leqslant i < l\}.$$

Wtedy:

$$1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}.$$

Załóżmy nie wprost, że istnieją takie liczby naturalne l_1, l_2, że $1 \leqslant l_1 < l_2 < l$ oraz:

$$h(w_1 w_2 w_3 ... w_{l_1}) = h(w_1 w_2 w_3 ... w_{l_2}) = k.$$

Wówczas słowo $w_{l_1+1} w_{l_1+2} w_{l_1+3} ... w_{l_2}$ należy do zbioru $D_{U,h}$, zatem słowo $w = w_1 w_2, w_3 ... w_l$ nie jest wolne od faktórów, czyli nie należy do zbioru $\widetilde{D}_{U,h}$, co jest sprzeczne z założeniem. Pokazaliśmy, że istnieje dokładnie jedna liczba naturalna l_0 taka, że $1 \leqslant l_0 < l$ oraz:

$$h(w_1 w_2 w_3 ... w_{l_0}) = l_0.$$

Ponadto zgodnie z definicją 3.2 oraz 3.3 słowo $u = w_1 w_2 w_3 ... w_{l_0}$ należy do zbioru $\widetilde{L}_k$, natomiast słowo $v = w_{l_0+1} w_{l_0+2} w_{l_0+3} ... w_l$ do zbioru $\widetilde{R}_k$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.10. *Jeżeli słowo w należy do zbioru $\widetilde{L}_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$, to istnieje dokładnie jedna liczba naturalna $i + 1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n + i\}$ taka, że $w = uv$, gdzie $u \in \widetilde{L}_k$ i $v \in \widetilde{R}_{k-i}$.*

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie jak w przypadku twierdzenia 2.9. □

Twierdzenie 2.11. *Jeżeli słowo w należy do zbioru $\widetilde{R}_j$, gdzie $1 \leqslant j \leqslant n$, to istnieje dokładnie jedna liczba naturalna $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n - j\}$ taka, że $w = uv$, gdzie $u \in \widetilde{L}_k$ i $v \in \widetilde{R}_{k+j}$.*

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie jak w przypadku twierdzenia 2.9. □

Powyższe twierdzenia można przedstawić w formie addytywnej za pomocą wzorów:

$$\widetilde{D}_{U,h} = \epsilon + \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} \widetilde{L}_k \widetilde{R}_k, \tag{2.1}$$

$$\widetilde{L}_i = \sum_{k=i+1}^{\min\{m,n+i\}} \widetilde{L}_k \widetilde{R}_{k-i}, \tag{2.2}$$

$$\widetilde{R}_j = \sum_{k=1}^{\min\{m,n-j\}} \widetilde{L}_k \widetilde{R}_{k+j}. \tag{2.3}$$

Definicja 2.12. *Jeśli słowo $w \in \widetilde{D}_{U,h}$ to długość w wynosi $(m+n)k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy zbiór $\widetilde{D}_k$ jako:*

$$\widetilde{D}_k := \{w \in \widetilde{D}_{U,h} : w \textit{ ma długość równą } (m+n)k\}$$

oraz funkcję tworzącą:

$$\widetilde{D}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} |\widetilde{D}_k| t^k.$$

W dalszej części pracy zbiór $\widetilde{D}_{U,h}$ będziemy oznaczać symbolem $\widetilde{D}$.

Rozdział 3

Przypadek $m = 2p + 1$, $n = 2$

Zbiór rozważany w poprzednim rozdziale ograniczmy do słów wolnych od faktorów, utworzonych za pomocą alfabetu $U = \{a, b\}$ z waluacją $h(a) = 2p+1$, gdzie $p \in \mathbb{N}$ oraz $h(b) = -2$. Wówczas wzory opisujące zbiory (2.1), (2.2) oraz (2.3) przyjmują postać:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2, \tag{3.1}$$

$$\widetilde{L}_i = \begin{cases} \widetilde{L}_{i+1}\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_{i+2}, \widetilde{R}_2 & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant 2p-1, \\ \widetilde{L}_{2p+1}\widetilde{R}_1 & \text{dla } i = 2p, \\ \{a\} & \text{dla } i = 2p+1, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\widetilde{R}_1 = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2, \qquad \widetilde{R}_2 = \{b\}. \tag{3.3}$$

W celu ułatwienia rachunków wprowadzamy następujące definicje:

Definicja 3.1. *Niech $\widetilde{S}(k,l)$ będzie sumą wszystkich wyrazów postaci:*

$$X_1X_2...X_{k+l},$$

gdzie $X_i \in \{\widetilde{R}_1, b\}$, przy czym $\widetilde{R}_1$ występuje k razy, a b występuje l razy. Zauważmy, że $\widetilde{S}(k,l)$ jest sumą $\binom{k+l}{k}$ składników.

Jeśli $w \in \widetilde{R}_1$, to słowo w jest postaci:

$$w = w_1b^p,$$

dla pewnego $w_1 \in U^*$. W takim przypadku zapisujemy:

$$w_1 = wb^{-p}.$$

Definicja 3.2. *Jeśli $k \geqslant 1$ lub $l \geqslant p$ to symbol $\widetilde{T}(k,l)$ definiujemy jako:*

$$\widetilde{T}(k,l) := \widetilde{S}(k,l)b^{-p}.$$

Lemat 3.3. *Jeśli $k \geqslant 1$ oraz $l \geqslant 1$, to mamy:*

$$\widetilde{S}(k,l) = \widetilde{S}(k-1,l)\widetilde{R}_1 + \widetilde{S}(k,l-1)b.$$

W przypadku, gdy $k = 0$ i $l \geqslant 1$, zbiór $\widetilde{S}(k,l)$ ma postać:

$$\widetilde{S}(0,l) = \underbrace{bb\cdots b}_{l\ razy},$$

natomiast, gdy $k \geqslant 1$ i $l = 0$ otrzymujemy:

$$\widetilde{S}(k,0) = \underbrace{\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\cdots\widetilde{R}_1}_{k\ razy}.$$

Dla $k = 0$ i $l = 0$ mamy:

$$\widetilde{S}(0,0) = \epsilon.$$

Rozdział 4

Przypadek $m = 3$, $n = 2$

Opierając się na badaniach P. Duchona oraz W. Domaszewskiej rozważmy przypadek, w którym dla liter z alfabetu $U = \{a, b\}$ mamy waluacje $h(a) = 3$ oraz $h(b) = -2$. Wtedy słowa napisane za pomocą alfabetu U mają długość równą $5k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Zaczniemy od wyznaczania zbiorów $\widetilde{D}, \widetilde{L}_i$ oraz $\widetilde{R}_j$. Na podstawie wzorów (3.1), (3.2) i (3.3) otrzymujemy równania:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2, \tag{4.1}$$

$$\widetilde{L}_1 = \widetilde{L}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2, \tag{4.2a}$$

$$\widetilde{L}_2 = \widetilde{L}_3\widetilde{R}_1, \tag{3.2b}$$

$$\widetilde{L}_3 = \{a\}, \tag{4.2c}$$

$$\widetilde{R}_1 = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2, \tag{4.3a}$$

$$\widetilde{R}_2 = \{b\}. \tag{4.3b}$$

Zwróćmy uwagę, że każde słowo $w \in \widetilde{R}_1$ możemy zapisać w postaci:

$$w = avbb,$$

gdzie $v = v_1v_2...v_k$ jest słowem wolnym od faktorów, spełniającym warunki:

1. $h(v) = 0$,
2. $h(v_1v_2...v_l) \geqslant -2$, gdzie $1 \leqslant l < k$.

Zbiór takich słów oznaczmy symbolem $\widetilde{V}$. Z drugiej strony, jeżeli $v \in \widetilde{V}$, to słowa $a\widetilde{V}bb \in \widetilde{R}_1$. Mamy zatem równość:

$$\widetilde{R}_1 = a\widetilde{V}bb. \tag{4.4}$$

Dla zbioru $\widetilde{V}$ określamy $\widetilde{V}_k$ i funkcję tworzącą $\widetilde{V}_k$ w podobny sposób jak w definicji 2.12 dla zbioru $\widetilde{D}$.

Własność 4.1. *Zbiór $\widetilde{V}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{V} = \epsilon + a\widetilde{V}bba\widetilde{V}b. \tag{4.5}$$

Dowód. Wykorzystując wzory (4.3a) oraz (4.4), opisujące zbiór $\widetilde{R}_1$, dostajemy równanie:

$$a\widetilde{V}bb = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2,$$

które przekształcamy poprzez podstawienie (4.2a), w ten sposób otrzymujemy:

$$a\widetilde{V}bb = (\widetilde{L}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2.$$

Stosujemy wzór na $\widetilde{L}_2$, stąd mamy:

$$a\widetilde{V}bb = (\widetilde{L}_3\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2,$$

następnie korzystamy z własności $\widetilde{L}_3 = \{a\}$ i $\widetilde{R}_2 = \{b\}$, wówczas uzyskujemy:

$$a\widetilde{V}bb = (a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + ab)b.$$

Po podstawieniu (4.4), otrzymujemy równanie:

$$a\widetilde{V}bb = (aa\widetilde{V}bba\widetilde{V}bb + ab)b,$$

które po uproszczeniu ma postać:

$$a\widetilde{V}bb = a(a\widetilde{V}bba\widetilde{V}b + \epsilon)bb$$

i ostatecznie:

$$\widetilde{V} = \epsilon + a\widetilde{V}bba\widetilde{V}b,$$

co należało udowodnić. □

Własność 4.2. *Zbiór $\widetilde{D}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{D} = \epsilon + aa\widetilde{V}bba\widetilde{V}bba\widetilde{V}bb + aba\widetilde{V}bb + aa\widetilde{V}bbb. \tag{4.6}$$

Dowód. Aby udowodnić powyższą własność, będziemy przekształcać równanie (4.1), które jest postaci:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2.$$

Korzystając ze wzoru na $\widetilde{L}_1$, dostajemy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + (\widetilde{L}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2,$$

po uproszczeniu mamy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2.$$

Następnie stosujemy równanie na $\widetilde{L}_2$, stąd:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2,$$

po podstawieniu $\widetilde{L}_3 = \{a\}$ i $\widetilde{R}_2 = \{b\}$, otrzymujemy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + ab\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1b.$$

Wykorzystując wzór (4.4), dostajemy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + aa\widetilde{V}bba\widetilde{V}bba\widetilde{V}bb + aba\widetilde{V}bb + aa\widetilde{V}bbb,$$

co kończy dowód. □

Własność 4.3. *Funkcje tworzące $\widetilde{V}(t)$ oraz $\widetilde{D}(t)$ spełniają równania:*

$$\widetilde{V}(t) = 1 + t\widetilde{V}(t)^2, \tag{4.7}$$

$$\widetilde{D}(t) = 1 + t^2\widetilde{V}(t)^3 + 2t\widetilde{V}(t). \tag{4.8}$$

Dowód. Funkcja tworząca $\widetilde{V}(t)$ jest postaci:

$$\widetilde{V}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |\widetilde{V}_k| t^k,$$

gdzie $\widetilde{V}_k$ to zbiór słów należących do $\widetilde{V}$ o długości $5k$, dla $k \in \mathbb{N}$. Wiedząc, że dla $k = 0$ mamy $|\widetilde{V}_0| = 1$, zapisujemy:

$$\widetilde{V}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{V}_k| t^k. \tag{4.9}$$

Na podstawie własności 4.1, dostajemy:

$$\widetilde{V}_k = \sum_{\substack{k_1,k_2 \geqslant 0 \\ k_1+k_2=k-1}} a\widetilde{V}_{k_1}bba\widetilde{V}_{k_2}b,$$

wówczas moc zbioru $\widetilde{V}_k$ opisuje wzór:

$$|\widetilde{V}_k| = \sum_{\substack{k_1,k_2 \geqslant 0 \\ k_1+k_2=k-1}} |\widetilde{V}_{k_1}| \cdot |\widetilde{V}_{k_2}|,$$

który podstawiamy do równania (4.9), w ten sposób otrzymujemy:

$$\widetilde{V}(t) = 1 + t\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1,k_2 \geqslant 0 \\ k_1+k_2=k-1}} |\widetilde{V}_{k_1}| t^{k_1} \cdot |\widetilde{V}_{k_2}| t^{k_2}.$$

Zwróćmy uwagę, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, takiego, że $k \geqslant 1$ zachodzi $k_1 + k_2 \geqslant 0$. Wtedy mamy:

$$\widetilde{V}(t) = 1 + t \sum_{k_1,k_2 \geqslant 0} |\widetilde{V}_{k_1}| t^{k_1} \cdot |\widetilde{V}_{k_2}| t^{k_2},$$

stąd:

$$\widetilde{V}(t) = 1 + t\widetilde{V}(t)\widetilde{V}(t),$$

co możemy zapisać jako:

$$\widetilde{V}(t) = 1 + t\widetilde{V}(t)^2.$$

Dowód dla funkcji tworzącej $\widetilde{D}(t)$ przeprowadzamy w analogiczny sposób. □

Własność 4.4. *Moc zbioru $\widetilde{V}_k$ jest równa:*

$$|\widetilde{V}_k| = C_k, \tag{4.10}$$

gdzie C_k to k-ta liczba Catalana.

Dowód. Funkcja tworząca dla ciągu liczb Catalana jest zdefiniowana przez:

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \tag{4.11}$$

co można zapisać jako:

$$C(t) = 1 + xC(t)^2. \tag{4.12}$$

Zwróćmy uwagę, że funkcja tworząca $\widetilde{V}(t)$ (4.7) ma taką samą postać, jak funkcja tworząca dla ciągu liczb Catalana (4.12). Zatem $|\widetilde{V}_k|$, to k-ta liczba Catalana. □

Własność 4.5. *Moc zbioru $\widetilde{D}_k$ jest równa:*

$$|\widetilde{D}_k| = C_{k-1} + C_k, \tag{4.13}$$

gdzie C_k to k-ta liczba Catalana.

Dowód. Funkcje tworzącą dla ciągu liczb Catalana (4.12) możemy przedstawić w postaci:

$$xC(t)^2 - C(t) + 1 = 0$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe, przyjmujemy za szukaną zmienną $C(t)$, wtedy otrzymujemy:

$$C(t) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \quad \text{lub} \quad C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Warunek $C(0) = c_0 = 1$ eliminuje pierwsze rozwiązanie, zatem mamy:

$$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Korzystając z własności 4.4 zapisujemy:

$$\widetilde{V}(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t},$$

podstawiając powyższą równość do funkcji tworzącej (4.8) postaci:

$$\widetilde{D}(t) = 1 + t^2\widetilde{V}(t)^3 + 2t\widetilde{V}(t),$$

otrzymujemy:

$$\widetilde{D}(t) = 1 + t^2\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^3 + 2t\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right).$$

Po przekształceniu mamy:

$$\widetilde{D}(t) = 1 + t^2\left(\frac{1-3\sqrt{1-4t}+3(1-4t)-(\sqrt{1-4t})^3}{8t^3}\right) + 1 - \sqrt{1-4t},$$

stąd dostajemy:

$$\widetilde{D}(t) = 2 - \sqrt{1-4t} + \frac{4 - 12t - 3\sqrt{1-4t} - (1-4t)(\sqrt{1-4t})}{8t},$$

a następnie:

$$\widetilde{D}(t) = 2 - \sqrt{1-4t} + \frac{4 - 12t - 4\sqrt{1-4t} + 4t(\sqrt{1-4t})}{8t}.$$

Po kolejnych uproszczeniach otrzymujemy:

$$\widetilde{D}(t) = 2 - \sqrt{1-4t} + \frac{1}{2t} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1-4t}}{2t} + \frac{\sqrt{1-4t}}{2},$$

stąd mamy:

$$\widetilde{D}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4t} + \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1-4t}),$$

co możemy zapisać jako:

$$\widetilde{D}(t) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4t}) + \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1-4t}).$$

Równanie przyjmuje postać:

$$\widetilde{D}(t) = (t+1)\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}.$$

Korzystając ze wzoru (4.11) dostajemy:

$$\widetilde{D}(t) = (t+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

po przekształceniu mamy równanie postaci:

$$\widetilde{D}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} + c_n t^n,$$

stąd otrzymujemy:

$$\widetilde{D}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} t^n + 1 + +c_n t^n,$$

ostatecznie funkcje tworzącą zapisujemy jako:

$$\widetilde{D}(t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n-1} + c_n) t^n.$$

Wówczas liczba $|\widetilde{D}_k|$ jest równa sumie liczb C_{k-1} i C_k, gdzie C_k to k-ta liczba Catalana.

$\square$

Rozdział 5

Przypadek $m = 5$, $n = 2$

W tym rozdziale przeanalizujemy przypadek gdy $m = 5$ i $n = -2$, wówczas rozpatrujemy słowa długości $7k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, napisane za pomocą dwuliterowego alfabetu $U = \{a, b\}$ z waluacją $h(a) = 5$ i $h(b) = -2$.

Zbiory $\widetilde{D}$, $\widetilde{L}_i$ oraz $\widetilde{R}_j$ przyjmują postać:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2, \tag{5.1}$$

$$\widetilde{L}_1 = \widetilde{L}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2, \tag{5.2a}$$
$$\widetilde{L}_2 = \widetilde{L}_3\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2, \tag{5.2b}$$
$$\widetilde{L}_3 = \widetilde{L}_4\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2, \tag{5.2c}$$
$$\widetilde{L}_4 = \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1, \tag{5.2d}$$
$$\widetilde{L}_5 = \{a\}, \tag{5.2e}$$

$$\widetilde{R}_1 = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2, \tag{5.3a}$$
$$\widetilde{R}_2 = \{b\}. \tag{5.3b}$$

Zwróćmy uwagę, że każde słowo $w \in \widetilde{R}_1$ możemy zapisać w postaci:

$$w = avbbb,$$

gdzie $v = v_1v_2...v_k$ jest słowem wolnym od faktorów, spełniającym warunki:

1. $h(v) = 0$,
2. $h(v_1v_2...v_l) \geqslant -4$, gdzie $0 \leqslant l < k$.

Zbiór takich słów oznaczmy symbolem $\widetilde{V}$. Z drugiej strony, jeżeli $v \in \widetilde{V}$, to słowa $a\widetilde{V}bbb \in \widetilde{R}_1$. Mamy zatem równość:

$$\widetilde{R}_1 = a\widetilde{V}bbb, \tag{5.4}$$

W dalszej części pracy będziemy wykorzystywać oznaczenia $S(k, l)$ oraz $T(k, l)$ wyprowadzone w definicji 3.1 oraz 3.2.

Własność 5.1. *Zbiór $\widetilde{V}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{V} = \epsilon + \widetilde{T}(4, 0) + \widetilde{T}(2, 1). \tag{5.5}$$

Dowód. Podstawiamy $\widetilde{R}_1 = a\widetilde{V}bbb$ do równania $\widetilde{R}_1 = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2$, w ten sposób otrzymujemy:

$$a\widetilde{V}bbb = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2.$$

Wykorzystujemy wzór (5.2a), stąd mamy:

$$a\widetilde{V}bbb = (\widetilde{L}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2,$$

następnie stosując równość (5.2b), uzyskujemy:

$$a\widetilde{V}bbb = \Big((\widetilde{L}_3\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2\Big)\,\widetilde{R}_2,$$

po uproszczeniu dostajemy:

$$a\widetilde{V}bbb = (\widetilde{L}_3\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2.$$

Podstawiamy odpowiednią postać $\widetilde{L}_3$, wtedy mamy:

$$a\widetilde{V}bbb = \Big((\widetilde{L}_4\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + (\widetilde{L}_4\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2\Big)\,\widetilde{R}_2,$$

stąd:

$$a\widetilde{V}bbb = (\widetilde{L}_4\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2.$$

Wykorzystujemy wzór (5.2d), w ten sposób otrzymujemy:

$$a\widetilde{V}bbb = (\widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2,$$

następnie wiedząc,że $\widetilde{L}_5 = \{a\}$ i $\widetilde{R}_2 = \{b\}$, zapisujemy równanie:

$$a\widetilde{V}bbb = (a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + ab\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b + abb)b,$$

które po uproszczeniu ma postać:

$$\widetilde{V}bb = \widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b + bb$$

lub równoważnie:

$$\widetilde{V} = \epsilon + \widetilde{T}(4,0) + \widetilde{T}(2,1),$$

co kończy dowód.

□

Własność 5.2. *Zbiór $\widetilde{D}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{D} = \epsilon + a\widetilde{S}(5,0) + a\widetilde{S}(3,1) + a\widetilde{S}(1,2). \tag{5.6}$$

Dowód. Powyższą własność udowodnimy przez przekształcanie równania (5.1) postaci:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2.$$

Po podstawieniu wzoru na $\widetilde{L}_1$ mamy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + (\widetilde{L}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2,$$

następnie korzystamy z równości (5.2b), w ten sposób otrzymujemy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + (\widetilde{L}_3\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + (\widetilde{L}_3\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2,$$

stąd:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2.$$

Wykorzystujemy wzór (5.2c), wtedy równanie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\widetilde{D} = \epsilon &+ \widetilde{L}_4\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 \\ &+ \widetilde{L}_4\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2,\end{aligned}$$

następnie wzór (5.2d), stąd mamy:

$$\begin{aligned}\widetilde{D} = \epsilon &+ \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 \\ &+ \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2.\end{aligned}$$

Stosujemy własności $\widetilde{L_5} = \{a\}$ oraz $\widetilde{R_2} = \{b\}$, wówczas dostajemy równanie:

$$\begin{aligned}\widetilde{D} = \epsilon &+ a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + ab\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1 b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 b\widetilde{R}_1 + abb\widetilde{R}_1 \\ &+ a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 b + ab\widetilde{R}_1 b + a\widetilde{R}_1 bb,\end{aligned}$$

które równoważnie możemy zapisać w postaci:

$$\widetilde{D} = \epsilon + a\widetilde{S}(5,0) + a\widetilde{S}(3,1) + a\widetilde{S}(1,2),$$

co należało udowodnić. □

Własność 5.3. *Funkcje tworzące $\widetilde{V}(t)$ oraz $\widetilde{D}(t)$ spełniają warunki:*

$$\widetilde{V}(t) = 1 + t^2\widetilde{V}^4(t) + 3t\widetilde{V}^2(t) \tag{5.7}$$

$$\widetilde{D}(t) = 1 + t^3\widetilde{V}^5(t) + 4t^2\widetilde{V}^3(t) + 3t\widetilde{V}(t) \tag{5.8}$$

Dowód. Dowód przeprowadzamy w podobny sposób jak w przypadku własności 4.3 wykorzystując wzory (5.5) oraz (5.6). □

Rozdział 6

Przypadek $m = 7$, $n = 2$

W tym rozdziale zbadamy przypadek, gdy dla dwuliterowego alfabetu U mamy waluacje $h(a) = 7$ oraz $h(b) = -2$.

Na podstawie wzorów (3.1), (3.2) oraz (3.3) wyznaczamy równania:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2, \tag{6.1}$$

$$\widetilde{L}_1 = \widetilde{L}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_3\widetilde{R}_2, \tag{6.2a}$$
$$\widetilde{L}_2 = \widetilde{L}_3\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2, \tag{6.2b}$$
$$\widetilde{L}_3 = \widetilde{L}_4\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2, \tag{6.2c}$$
$$\widetilde{L}_4 = \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2, \tag{6.2d}$$
$$\widetilde{L}_5 = \widetilde{L}_6\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2, \tag{6.2e}$$
$$\widetilde{L}_6 = \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1, \tag{6.2f}$$
$$\widetilde{L}_7 = \{a\}, \tag{6.2g}$$

$$\widetilde{R}_1 = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2, \tag{6.3a}$$
$$\widetilde{R}_2 = \{b\}. \tag{6.3b}$$

Warto zwrócić uwagę, że wzory opisujące zbiory $\widetilde{D}, \widetilde{L}_1 oraz \widetilde{R}_1$, oraz $\widetilde{R}_2$ są identyczne dla wszystkich rozważanych wyżej przypadków waluacji liter a i b.

Zauważmy, że każde słowo $w \in \widetilde{R}_1$ możemy zapisać w postaci:

$$w = avbbbb,$$

gdzie $v = v_1v_2...v_k$ jest słowem wolnym od faktorów, spełniającym warunki:

1. $h(v) = 0$,

2. $h(v_1v_2...v_l) \geqslant -6$, gdzie $1 \leqslant l < k$.

Zbiór takich słów oznaczmy symbolem $\widetilde{V}$. Z drugiej strony, jeżeli $v \in \widetilde{V}$, to słowa $a\widetilde{V}bbbb \in \widetilde{R}_1$. Mamy zatem równość:

$$\widetilde{R}_1 = a\widetilde{V}bbbb, \tag{6.4}$$

Własność 6.1. *Zbiór $\widetilde{V}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{V} = \epsilon + \widetilde{T}(6,0) + \widetilde{T}(4,1) + \widetilde{T}(2,2). \tag{6.5}$$

Dowód. Powyższą własność udowodnimy przez przekształcenie równania:

$$a\widetilde{V}bbbb = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2.$$

Podstawiając odpowiednie wzory na $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2$ oraz $\widetilde{L}_3$, uzyskujemy:

$$a\widetilde{V}bbbb = (\widetilde{L}_4\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_4\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2,$$

następnie stosujemy postać $\widetilde{L}_4$, wówczas dostajemy:

$$\begin{aligned} a\widetilde{V}bbbb = \Big(&(\widetilde{L}_5\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + (\widetilde{L}_5\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 \\ &+ (\widetilde{L}_5\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\Big)\,\widetilde{R}_2, \end{aligned}$$

po uproszczeniu mamy:

$$\begin{aligned} a\widetilde{V}bbbb = (&\widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 \\ &+\widetilde{L}_5\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_5\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2. \end{aligned}$$

Następnie wykorzystując wzór (6.2e), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a\widetilde{V}bbbb = ((&\widetilde{L}_6\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + (\widetilde{L}_6\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 \\ &+(\widetilde{L}_6\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + (\widetilde{L}_6\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 \\ &+\widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + (\widetilde{L}_6\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2, \end{aligned}$$

stąd:

$$\begin{aligned} a\widetilde{V}bbbb = (&\widetilde{L}_6\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 \\ &+\widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 \\ &+\widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_6\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2. \end{aligned}$$

Po podstawieniu równania, opisującego zbiór $\widetilde{L}_6$, mamy:

$$\begin{aligned} a\widetilde{V}bbbb = (&\widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 \\ &+\widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 \\ &+\widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2 + \widetilde{L}_7\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2\widetilde{R}_2)\widetilde{R}_2. \end{aligned}$$

Wiedząc, że $\widetilde{L}_7 = \{a\}$ oraz $\widetilde{R}_2 = \{b\}$, zapisujemy:

$$\begin{aligned} a\widetilde{V}bbbb = (&a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + ab\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 \\ &+abb\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1 + ab\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1bb\widetilde{R}_1 + a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b \\ &+ab\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + a\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1b + a\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1bb + abbb)b, \end{aligned}$$

po przekształceniu dostajemy:

$$\begin{aligned} a\widetilde{V}bbb = &\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 \\ &+bb\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1 + b\widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_1bb\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1b \\ &+b\widetilde{R}_1\widetilde{R}_1\widetilde{R}_2 + \widetilde{R}_1b\widetilde{R}_1b + \widetilde{R}_1\widetilde{R}_1bb + bbb, \end{aligned}$$

co można zapisać w postaci:

$$\widetilde{V} = \epsilon + \widetilde{T}(6,0) + \widetilde{T}(4,1) + \widetilde{T}(2,2),$$

co należało udowodnić. $\square$

Własność 6.2. *Zbiór $\widetilde{D}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{D} = \epsilon + a\widetilde{S}(7,0) + a\widetilde{S}(5,1) + a\widetilde{S}(3,2) + a\widetilde{S}(1,3). \tag{6.6}$$

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie jak w przypadku własności 5.2 poprzez przekształcenie równania (6.1), postaci:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2.$$

$\square$

Własność 6.3. *Funkcje tworzące $\widetilde{V}(t)$ oraz $\widetilde{D}(t)$ spełniają warunki:*

$$\widetilde{V}(t) = 1 + t^3\widetilde{V}^6(t) + 5t^2\widetilde{V}^4(t) + 6t\widetilde{V}^2(t), \tag{6.7}$$

$$\widetilde{D}(t) = 1 + t^4\widetilde{V}^7(t) + 6t^3\widetilde{V}^5(t) + 10t^2\widetilde{V}^3(t) + 4t\widetilde{V}(t). \tag{6.8}$$

Dowód. Dowód przeprowadzamy w podobny sposób jak w przypadku własności 4.3 wykorzystując wzory (6.5) oraz (6.6). $\square$

Rozdział 7

Przypadek ogólny

Rozważmy przypadek ogólny, to znaczy zbiór słów wolnych od faktorów, utworzonych za pomocą alfabetu $U = \{a, b\}$ z waluacja $h(a) = 2p + 1$, gdzie $p \in \mathbb{N}$ oraz $h(b) = -2$. Wówczas rozpatrujemy słowa długości $k(2p + 3)$, przy czym $k \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że zbiory $\widetilde{D}, \widetilde{L}_i$ oraz $\widetilde{R}_j$ spełniają następujące zależności:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2, \tag{7.1}$$

$$\widetilde{L}_i = \begin{cases} \widetilde{L}_{i+1}\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_{i+2}, \widetilde{R}_2 & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant 2p-1, \\ \widetilde{L}_{2p+1}\widetilde{R}_1 & \text{dla } i = 2p, \\ \{a\} & \text{dla } i = 2p+1, \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\widetilde{R}_1 = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2, \qquad \widetilde{R}_2 = \{b\}. \tag{7.3}$$

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach zauważmy, że zbiór $\widetilde{R}_1$ możemy opisać również równaniem:

$$\widetilde{R}_1 = a\widetilde{V}b^{p+1}, \tag{7.4}$$

gdzie $\widetilde{V}$ jest zbiorem słów $v = v_1v_2...v_k$ wolnych od faktorów, spełniającym warunki:

1. $h(v) = 0$,
2. $h(v_1v_2...v_l) \geqslant -2p$, gdzie $1 \leqslant l < k$.

Twierdzenie 7.1. *Jeśli* $0 \leqslant k \leqslant 2p$ *to zbiór* $\widetilde{L}_{2p+1-k}$ *spełnia równanie:*

$$\widetilde{L}_{2p+1-k} = a\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \widetilde{S}(k - 2i, i). \tag{7.5}$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny.
1°. Dla $k = 0$ otrzymujemy:

$$\widetilde{L}_{2p+1} = a\widetilde{S}(0, 0) = a,$$

natomiast dla $k = 1$ otrzymujemy:

$$\widetilde{L}_{2p} = a\widetilde{S}(1, 0) = a\widetilde{R}_1,$$

co jest zgodne ze wzorem (7.2).
2°. Załóżmy, że równanie (7.5) jest prawdziwe dla $0 \leqslant k < k_0$. Na podstawie wzoru (7.2) mamy:

$$\widetilde{L}_{2p+1-k_0} = \widetilde{L}_{2p+1-k_0+1}\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_{2p+1-k_0+2}\widetilde{R}_2,$$

stąd:

$$\widetilde{L}_{2p+1-k_0} = \widetilde{L}_{2p+1-(k_0-1)}\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_{2p+1-(k_0-2)}\widetilde{R}_2.$$

Z założenia indukcyjnego wzór (7.5) jest prawdziwy dla $k_0 - 1$ oraz $k_0 - 2$, wtedy otrzymujemy:

$$\widetilde{L}_{2p+1-k_0} = a \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k_0-1}{2} \rfloor} \widetilde{S}(k_0 - 1 - 2i, i)\widetilde{R}_1 + a \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k_0-2}{2} \rfloor} \widetilde{S}(k_0 - 2 - 2i, i)b. \tag{7.6}$$

Rozpatrzymy teraz dwa przypadki:
1. Niech $k_0 = 2s$, dla $s \in \mathbb{N}$, wtedy równanie (7.6) zapisujemy jako:

$$\widetilde{L}_{2p+1-2s} = a \sum_{i=0}^{s-1} \widetilde{S}(2s - 1 - 2i, i)\widetilde{R}_1 + a \sum_{i=0}^{s-1} \widetilde{S}(2s - 2 - 2i, i)b.$$

Z drugiej strony z lematu 3.3, wiemy, że:

$$a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i, i) = a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i - 1, i)\widetilde{R}_1 + a \sum_{i=1}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i, i - 1)b,$$

stąd:

$$a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i, i) = a \sum_{i=0}^{s-1} \widetilde{S}(2s - 2i - 1, i)\widetilde{R}_1 + a \sum_{i=1}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i, i - 1)b.$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{i=0}^{s-1} \widetilde{S}(2s - 2 - 2i, i) = S(2s-2, 0) + S(2s-4, 1) + ... + S(0, s-1) = \sum_{i=1}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i, i - 1),$$

wówczas:

$$\widetilde{L}_{2p+1-2s} = a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i, i),$$

zatem pokazaliśmy, że dla k_0 parzystego prawdziwe jest równanie (7.5).
2. Niech $k_0 = 2s + 1$, dla $s \in \mathbb{N}$, wtedy równanie (7.6) zapisujemy w postaci:

$$\widetilde{L}_{2p+1-(2s+1)} = a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}\,(2s + 1 - 1 - 2i, i)\widetilde{R}_1 + a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s + 1 - 2 - 2i, i)b, \tag{7.7}$$

stąd:

$$\widetilde{L}_{2p+1-(2s+1)} = a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s - 2i, i)\widetilde{R}_1 + a \sum_{i=0}^{s-1} \widetilde{S}(2s - 2i - 1, i).b$$

Z lematu 3.3 wiemy, że:

$$a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s + 1 - 2i, i) = a \sum_{i=0}^{s} \widetilde{S}(2s + 1 - 2i - 1, i)\widetilde{R}_1 + a \sum_{i=1}^{s} \widetilde{S}(2s + 1 - 2i, i - 1)b,$$

co zapisujemy jako:

$$a\sum_{i=0}^{s}\widetilde{S}(2s+1-2i,i) = a\sum_{i=0}^{s}\widetilde{S}(2s-2i,i)\widetilde{R}_1 + a\sum_{i=1}^{s}\widetilde{S}(2s-2i+1,i-1)b,$$

Zwróćmy uwagę, że:

$$\sum_{i=0}^{s-1}\widetilde{S}(2s-2i-1,i) = S(2s-1,0)+S(2s-3,1)+...+S(1,s-1) = \sum_{i=1}^{s}\widetilde{S}(2s-2i+1,i-1),$$

zatem:

$$\widetilde{L}_{2p+1-(2s+1)} = \sum_{i=0}^{s-1}\widetilde{S}(2s+1-2i,i),$$

pokazaliśmy, że dla k_0 nieparzystego prawdziwe jest równanie (7.5).
3°. Na mocy indukcji matematycznej udowodniliśmy równość (7.5). □

Twierdzenie 7.2. *Zbiór $\widetilde{V}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{V} = \epsilon + \sum_{i=0}^{p-1}\widetilde{T}(2p-2i,i). \tag{7.8}$$

Dowód. Wykorzystujemy wzory (7.3) oraz (7.4), opisujące zbiór $\widetilde{R}_1$, w ten sposób otrzymujemy równanie:

$$a\widetilde{V}b^{p+1} = \widetilde{L}_1\widetilde{R}_2 \tag{7.9}$$

Z twierdzenia 7.1 wiemy, że:

$$\widetilde{L}_1 = a\sum_{i=0}^{p}\widetilde{S}(2p-2i,i).$$

Podstawiamy powyższą postać $\widetilde{L}_1$ do wzoru (7.9), stąd mamy:

$$a\widetilde{V}b^{p+1} = a\sum_{i=0}^{p}\widetilde{S}(2p-2i,i)\widetilde{R}_2,$$

po uproszczeniu dostajemy:

$$\widetilde{V}b^{p} = \sum_{i=0}^{p}\widetilde{S}(2p-2i,i),$$

a następnie:

$$\widetilde{V} = \sum_{i=0}^{p}\widetilde{S}(2p-2i,i)b^{-p}.$$

Korzystając z definicji 3.2, zapisujemy:

$$\widetilde{V} = \epsilon + \sum_{i=0}^{p-1}\widetilde{T}(2p-2i,i),$$

co należało udowodnić. □

Twierdzenie 7.3. *Zbiór $\widetilde{D}$ spełnia równanie:*

$$\widetilde{D} = \epsilon + a\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i). \tag{7.10}$$

Dowód. Zbiór $\widetilde{D}$ zgodnie ze wzorem (7.1) ma postać:

$$\widetilde{D} = \epsilon + \widetilde{L}_1\widetilde{R}_1 + \widetilde{L}_2\widetilde{R}_2. \tag{7.11}$$

Na podstawie twierdzenia 7.1 zapisujemy:

$$\widetilde{L}_1 = a\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p-2i, i),$$

oraz:

$$\widetilde{L}_2 = a\sum_{i=0}^{p-1} \widetilde{S}(2p-2i-1, i).$$

Po podstawieniu powyższych wzorów, opisujących zbiór $\widetilde{L}_1$ oraz $\widetilde{L}_2$, do równania (7.11) dostajemy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + a\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p-2i, i)\widetilde{R}_1 + a\sum_{i=0}^{p-1} \widetilde{S}(2p-2i-1, i)\widetilde{R}_2.$$

Z drugiej strony z lematu 3.3 wiemy, że:

$$\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i) = \sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i-1, i)\widetilde{R}_1 + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i-1)b,$$

stąd:

$$\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i) = \sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p-2i, i)\widetilde{R}_1 + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{S}(2p-2i+1, i-1)b.$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{i=0}^{p-1} \widetilde{S}(2p-2i-1, i)\widetilde{R}_2 = \sum_{i=1}^{p} \widetilde{S}(2p-2i+1, i-1)b,$$

co zostało pokazane w dowodzie twierdzenia 7.5. Zatem mamy:

$$\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i) = \sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p-2i, i)\widetilde{R}_1 + \sum_{i=0}^{p-1} \widetilde{S}(2p-2i-1, i),$$

stąd:

$$\epsilon + a\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i) = \epsilon + a\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p-2i, i)\widetilde{R}_1 + a\sum_{i=0}^{p-1} \widetilde{S}(2p-2i-1, i),$$

wówczas otrzymujemy:

$$\widetilde{D} = \epsilon + a\sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i),$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 7.4. *Funkcje tworzące $\widetilde{V}(t)$ oraz $\widetilde{D}(t)$ spełniają równania:*

$$\widetilde{V}(t) = 1 + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{2p-i}{i} t^{p-i} \widetilde{V}(t)^{2p-2i}, \tag{7.12}$$

$$\widetilde{D}(t) = 1 + \sum_{i=0}^{p} \binom{2p+1-i}{i} t^{p+1-i} \widetilde{V}(t)^{2p+1-2i}. \tag{7.13}$$

Dowód. Zbiór $\widetilde{V}$ zgodnie z twierdzeniem 7.2 ma postać:

$$\widetilde{V} = \epsilon + \sum_{i=0}^{p-1} \widetilde{T}(2p-2i, i).$$

Przypomnijmy, że wedle definicji 3.2 mamy:

$$\widetilde{T}(2p-2i, i) = \widetilde{S}(2p-2i, i) b^{-p}.$$

Wyrażenie $\widetilde{T}(2p-2i, i)$ zawiera $\binom{2p-2i+i}{i}$ składników, a każdy składnik jest iloczynem, takim, że:

- $\widetilde{V}$ występuje $2p-2i$ razy,
- a występuje $2p-2i = 2(p-1)$ razy,
- b występuje $(p+1)(2p-2i) + i - p = (2p+1)(p-i)$ razy.

Zatem funkcja tworząca dla zbioru $\widetilde{T}(2p-2i, i)$ wynosi:

$$\binom{2p+1-i}{i} t^{p+1-i} \widetilde{V}(t)^{2p+1-2i},$$

a to dowodzi wzoru (7.12).

Z twierdzenia 7.3 wiemy, że:

$$\widetilde{D} = \epsilon + a \sum_{i=0}^{p} \widetilde{S}(2p+1-2i, i).$$

Wyrażenie $a\widetilde{S}(2p+1-2i, i)$ zgodnie z definicją 3.1 zawiera $\binom{2p+1-2i+i}{i}$ składników, a każdy składnik jest iloczynem takim, że:

- $\widetilde{V}$ występuje $2p+1-2i$ razy,
- a występuje $2p+1-2i+1 = 2(p+1-i)$ razy,
- b występuje $(p+1)(2p+1-2i) + i = (2p+1)(p+1-i)$ razy.

Funkcja tworząca dla zbioru $a\widetilde{S}(2p+1-2i, i)$ wynosi:

$$\binom{2p+1-i}{i} t^{p+1-i} \widetilde{V}(t)^{2p+1-2i},$$

a to dowodzi wzoru (7.13), co kończy dowód całego twierdzenia. $\square$

Bibliografia

[1] M. T. L. Bizley *Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from* $(0,0)$ *to* (km, kn) *having just* t *contacts with the line* $my = nx$ *and having no points above this line; and a proof of Grossman's formula for the number of paths which may touch but do not rise above this line, Journal of the Institute of Actuaries*, 80 (1954), 55–62.

[2] P.Duchon, *On the enumeration and generation of generalized Dyck words*, Discrete Mathematics 225 (2000) 121–135.

[3] W. Domaszewska, *Uogólnione ścieżki Dycka na płaszczyźnie* (2022).

[4] R. L. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN (2001).