Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Matematyka teoretyczna

Rafał Łyżwa

Funkcja klasy Gevrey z jednopunktową osobliwością

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dr. hab. Jacka Zienkiewicza

Wrocław 2021

Spis treści

Wstęp

Załóżmy, że I jest przedziałem postaci $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, zaś f jest funkcją klasy $C^\infty(I)$, taką że $(\forall n \in \mathbb{N})(||f^{(n)}||_\infty \leqslant n!\alpha/\delta^n)$ dla pewnych liczb dodatnich α i δ. Wtedy f jest funkcją analityczną w otoczeniu każdego punktu przedziału I i w konsekwencji f jest wyznaczona jednoznacznie przez ciąg swoich pochodnych w ustalonym punkcie. Z drugiej strony istnieją funkcje $g_1, g_2 \in C^\infty(I)$, $g_1 \neq g_2$, oraz punkt $x_0 \in I$, dla których $(g_1^{(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}} = (g_2^{(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Dla przykładu, funkcja $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ zdefiniowana jako

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ e^{-x^{-2}} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

jest nieskończenie różniczkowalna i spełnia $(g^{(n)}(0))_n = 0$, tak samo jak funkcja stale równa zero, oraz $g \neq 0$. Powstaje pytanie, czy można nałożyć odpowiedni warunek w terminie ograniczeń pochodnych funkcji z $C^\infty(I)$ i w ten sposób zawęzić klasę $C^\infty(I)$ do pewnej podklasy V, tak aby funkcje z V były jednoznacznie wyznaczone przez ciągi ich pochodnych w ustalonym punkcie. Aby sprecyzować to pytanie, wprowadza się następujące definicje:

Definicja 1. Niech $I := [a, b]$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, takimi że $a < b$, i niech $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb dodatnich.
Klasą $C\{m_n\}$ nazywamy przestrzeń liniową tych funkcji $f \in C^\infty(I)$, dla których istnieją liczby dodatnie α, β, takie że

$$||f^{(n)}||_\infty \leqslant \alpha\beta^n m_n \ \text{ dla } \ n = 0, 1, 2, \dots$$

Definicja 2. Mówimy, że klasa $C\{m_n\}$ jest **quasi-analityczna**, jeżeli

$$(\forall f \in C\{m_n\}) \left(\quad (f^{(n)}(a))_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \quad \right).$$

Postawione wcześniej pytanie możemy teraz sformułować w ten sposób: Dla jakich ciągów $(m_n)_n$ klasa $C\{m_n\}$ jest quasi-analityczna? Odpowiedzi dostarcza poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3. ***(Denjoy-Carlemana)*** *Niech $(m_n)_n$ będzie ciągiem liczb dodatnich spełniającym*

$$m_0 = 1,$$

$$(\forall n \geqslant 1) \quad m_n^2 \leqslant m_{n-1} m_{n+1}. \tag{4}$$

Oznaczmy

$$Q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{m_n}, \qquad q(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{m_n} \qquad \textit{dla} \quad x > 0.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) klasa $C\{m_n\}$ nie jest quasi-analityczna,

(b) $\int_0^\infty \frac{\log Q(x)}{1+x^2} dx < \infty$,

(c) $\int_0^\infty \frac{\log q(x)}{1+x^2} dx < \infty$,

(d) $\sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{m_n})^{1/n} < \infty$,

(e) $\sum_{n=1}^\infty \frac{m_{n-1}}{m_n} < \infty$.

Powyższe twierdzenie, wraz z dowodem, przedstawione jest w książce [RW]. Elementarny dowód implikacji $(a) \Rightarrow (e)$ jest podany w pracy [BTh], a jego uproszczoną wersję można znaleźć w pracy [CPJ].

Uwaga. Dla ciągu $(m_n)_n$ liczb dodatnich, warunek 4 nazywamy logarytmiczną wypukłością. Jeśli ciąg $(B_n)_n \in (0, \infty)^{\mathbb{N}}$ spełnia

$$\lim_{n \to \infty} m_n^{1/n} = \infty \tag{5}$$

dla $m_n := B_n$, to istnieje ciąg $({B'}_n)_n \in (0, \infty)^{\mathbb{N}}$ logarytmicznie wypukły i taki, że każda funkcja z $C\{B_n\}$ należy do $C\{{B'}_n\}$, przy czym funkcje z $C\{{B'}_n\}$ są określone na być może mniejszym odcinku. Do dowodu używa się nierówności Cartana-Gornego — sformułowanie (ii) w twierdzeniu 1.8.

Bang w pracy [BTh] zaprezentował również następującą metodę, która pozwala "odzyskać" funkcję z oszacowaniami quasi-analitycznymi na podstawie ciągu jej pochodnych w ustalonym punkcie:

Niech dany będzie ciąg $(m_n)_n$ liczb dodatnich spełniający warunki 4 i 5, i taki że $C\{m_n\}$ jest klasą quasi-analityczną. Niech funkcja $f \in C^\infty(I)$ spełnia

$$(\exists \alpha > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ ||f^{(n)}||_\infty \leqslant \alpha m_n$$

i załóżmy, że znany jest ciąg $(f^{(n)}(a))_n$.

Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej N oraz $k = N, N-1, \ldots, 0$ oznaczmy

$$x_{N,k} := a + \frac{1}{e} \sum_{N > j \geqslant k} \frac{m_j}{m_{j+1}}.$$

Dla każdego $N \geqslant 1$ definiujemy rekurencyjnie wielomiany $T_{N,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $N \geqslant k \geqslant 1$:

$$T_{N,N}(x) := \sum_{0 \leqslant j < N} \frac{f^{(j)}(x_{N,N})}{j!}(x - x_{N,N})^j,$$

$$T_{N,k}(x) := \sum_{0 \leqslant j < k} \frac{T^{(j)}_{N,k+1}(x_{N,k})}{j!}(x - x_{N,k})^j \quad \text{dla } \ k = N-1, N-2, \ldots, 1.$$

Niech

$$T_N := \sum_{N \geqslant k \geqslant 1} T_{N,k} \mathbb{1}_{[x_{N,k}, x_{N,k-1})}.$$

Wówczas zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6. *Dla każdego* $j \in \mathbb{N}$,

$$T_N^{(j)} \xrightarrow{N \to \infty} f^{(j)} \quad \textit{jednostajnie na przedziale } I. \tag{7}$$

Uwaga. Dla ustalonego $j \in \mathbb{N}$, możemy napisać zależność 7, gdyż dla wystarczająco dużego N funkcja T_N jest j-krotnie różniczkowalna na przedziale I.

Metody rozwinięte przez Banga pozwoliły mu udowodnić następujące twierdzenie, [BTh]:

Twierdzenie 8. *Niech $(m_n)_n$ będzie ciągiem liczb dodatnich spełniającym warunki 4 i 5, i takim że $C\{m_n\}$ jest klasą quasi-analityczną.*
Niech funkcja f spełnia

$$f \in C^\infty(I) \quad \text{oraz} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ ||f^{(n)}||_\infty \leqslant m_n. \tag{9}$$

Ponadto załóżmy, że pochodne wszystkich rzędów (wraz z zerowym rzędem) funkcji f w punkcie a są dodatnie. Wówczas pochodne wszystkich rzędów funkcji f są dodatnie na całym przedziale I.

Uwaga. W powyższym twierdzeniu warunek 9 można zamienić na "$f \in C\{m_n\}$".

Uwaga. Funkcja f z własnościami jak w tezie twierdzenia 8 jest analityczna. Jest to treść twierdzenia Bernsteina. Wynika stąd, że można tak zadać ciąg a_n, że nie istnieje funkcja należąca do jakiejkolwiek klasy quasi-analitycznej, taka że $f^{(n)}(0) = a_n$. Z drugiej strony zadanie konstrukcji funkcji gładkiej, takiej że $f^{(n)}(0) = a_n$, ma dla każdego ciągu a_n rozwiązanie w klasie funkcji o nośniku zwartym (twierdzenie Borela, [HL]).
Ilościowe oszacowanie w konstrukcji Borela dla klas Gevrey rozpatrywał G. Góral w [GG].

Przedstawię teraz pewną konstrukcję niezerowej funkcji $f \in C\{m_n\}$ spełniającej $(f^{(n)}(a))_n = 0$. Jest to jeden z możliwych dowodów implikacji $(e) \Rightarrow (a)$ w twierdzeniu 3. Pochodzi z pracy [GG], w której jest podane rozwiązanie zmodyfikowanego zadania z książki [RW] (rozdział 19. "Holomorficzne transformacje Fouriera", podrozdział "Ćwiczenia", zadanie 10.).

Oznaczmy $d_0 := 1$ oraz $d_n := m_{n-1}/m_n$ dla $n \geqslant 1$.
Wtedy $d := \sum_{n=0}^{\infty} d_n < \infty$.
Niech ψ_0 będzie funkcją klasy $C_c^\infty(\mathbb{R})$, o nośniku zawartym w przedziale $[-1, 1]$ i taką, że $\psi_0 \geqslant 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}} \psi_0 = 1$.
Dla $n \geqslant 1$ przyjmijmy $\psi_n(x) := \frac{1}{d_n}\psi_0(\frac{x}{d_n})$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $n \geqslant 0$ mamy $\psi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\psi_n) \subseteq [-d_n, d_n]$ oraz $\int_{\mathbb{R}} \psi_n = 1$.
Dla $n \geqslant 0$ zdefiniujmy $h_n := \psi_0 * \psi_1 * \ldots * \psi_n$. Wtedy $h_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(h_n) \subseteq [-\sum_{j=0}^n d_j,\ \sum_{j=0}^n d_j] \subseteq [-d, d]$ oraz $\int_{\mathbb{R}} h_n = 1$.
Można pokazać, że ciąg $(h_n)_n$ spełnia warunek Cauchy'ego w normie supremum, a zatem ma granicę h w tej normie.
Funkcja h ma zwarty nośnik:

$$\operatorname{supp}(h) \subseteq [-d, d];$$

oraz jest gładka:

$$h^{(k)} = \lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} \quad \text{w normie supremum.}$$

Dla $k \in \mathbb{N}$ i $n > k$ szacujemy

$$\begin{aligned}||h_n^{(k)}||_\infty &= ||\psi_0 * (\psi_1' * \ldots * \psi_k') * (\psi_{k+1} * \ldots * \psi_n)||_\infty \leqslant \\ &\leqslant ||\psi_0 * (\psi_1' * \ldots * \psi_k')||_\infty \cdot ||\psi_{k+1} * \ldots * \psi_n||_1 \leqslant \\ &\leqslant ||\psi_0||_\infty \cdot ||\psi_1' * \ldots * \psi_k'||_1 \leqslant \\ &\leqslant ||\psi_0||_\infty \cdot \prod_{j=1}^{k} ||\psi_j'||_1 = ||\psi_0||_\infty \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{1}{d_j}||\psi_0'||_1) = ||\psi_0||_\infty m_k ||\psi_0'||_1^k.\end{aligned}$$

Stąd $||h^{(k)}||_\infty \leqslant ||\psi_0||_\infty ||\psi_0'||_1^k m_k$.
Dalej,

$$\int_{\mathbb{R}} h = \int_{-d}^{d} (h - h_n) + 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

co implikuje $h \neq 0$.

Określmy teraz $\phi(x) := \frac{2d}{b-a}(x-a) - d$ oraz

$$f(x) := h(\phi(x)) \quad \text{dla } x \in I.$$

Mamy $f^{(k)}(x) = (\frac{2d}{b-a})^k h^{(k)}(\phi(x))$.
Otrzymujemy więc, że f jest żądaną funkcją.

Niech $m_n := n^{\gamma n}$, gdzie γ jest ustaloną liczbą większą od 1. Klasa $C\{m_n\}$ nosi nazwę klasy Gevrey. W dalszej części pracy zaprezentujemy inną niż przedstawione powyżej konstrukcję niezerowej funkcji z $C\{m_n\}$. Funkcja ta będzie określona na $\mathbb{R}$, analityczna na $(0,\infty)$ i zerowa na $(-\infty, 0]$. Naszym głównym wynikiem jest Twierdzenie 2.17.

Rozdział 1

Podstawowe fakty

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe definicje i fakty (bez podawania dowodów), z których korzystamy w pozostałej części pracy.

Przyjmujemy konwencje $0 \in \mathbb{N}$ oraz $0^0 = 1$.
Dla $z \in \mathbb{C}, \quad r \in (0, \infty)$ przyjmijmy oznaczenia:

$$D(z,r) := \{w \in \mathbb{C} \colon\ |w - z| < r\},$$

$$\overline{D}(z,r) := \{w \in \mathbb{C} \colon\ |w - z| \leqslant r\}.$$

Oznaczmy również $H := \{z \in \mathbb{C} \colon\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Definicja 1.1. Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Funkcję z Ω w $\mathbb{C}$ nazywamy **holomorficzną**, gdy jest ona różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie zbioru Ω.

Fakt 1.2. *Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jest otwarty, zaś $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna. Wtedy*

(i) f jest nieskończenie różniczkowalna w sensie zespolonym;

(ii) jeśli $D(z,r) \subseteq \Omega$, to dla każdego $w \in D(z,r)$ mamy

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w - z)^n.$$

Twierdzenie 1.3. ***(zasada maksimum)*** *Załóżmy, że Ω jest otwartym i spójnym podzbiorem $\mathbb{C}$, $\quad f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną oraz $\overline{D}(z,r) \subseteq \Omega$. Wówczas*

$$|f(z)| \leqslant \max_{t \in [0,2\pi)} |f(z + re^{it})|,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją stałą.

Wniosek 1.4. *Załóżmy, że Ω jest niepustym, otwartym i spójnym podzbiorem $\mathbb{C}$. Dla funkcji holomorficznej $f : \Omega \to \mathbb{C}$ następujące warunki są równoważne:*

(a) funkcja $|f|$ osiąga maksimum;

(b) funkcja f jest stała.

Twierdzenie 1.5. ***(nierówności Cauchy'ego)*** *Niech $f : D(z, r) \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, której moduł jest ograniczony z góry przez liczbę $M \geqslant 0$. Wówczas*

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!M}{r^n}$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

Definicja 1.6. Niech $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Mówimy, że $(B_n)_n$ jest **logarytmicznie wypukły**, gdy $(\log B_n)_n$ jest ciągiem wypukłym, tzn. dla dowolnych $j, k, l \in \mathbb{N}$, takich że $j < l$ oraz $j \leqslant k \leqslant l$, zachodzi

$$\log B_k \leqslant \frac{l-k}{l-j} \log B_j + \frac{k-j}{l-j} \log B_l.$$

Fakt 1.7. *Dla ciągu $(B_n)_n$ liczb dodatnich następujące warunki są równoważne:*

(a) $(B_n)_n$ jest logarytmicznie wypukły;

(b) dla dowolnych $j, k, l \in \mathbb{N}$, $\quad j < l$, $\quad j \leqslant k \leqslant l$, zachodzi

$$B_k \leqslant (B_j)^{\frac{l-k}{l-j}} (B_l)^{\frac{k-j}{l-j}};$$

(c) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $\quad n \geqslant 1$, zachodzi

$$B_n^2 \leqslant B_{n-1} B_{n+1}.$$

Poniższe twierdzenie pochodzi z pracy [GA].

Twierdzenie 1.8. *Niech $I := [a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, oraz niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną na przedziale I, taką że $|f| \leqslant M_0$, $\quad |f^{(n)}| \leqslant M_n$. Oznaczmy $M_n' := \max\{M_n,\ M_0 n!(b-a)^{-n}\}$. Wówczas dla $0 < k < n$ mamy*

(i) $\quad |f^{(k)}(x)| < 4e^{2k}(\frac{n}{k})^k (M_0)^{1-\frac{k}{n}} (M_n')^{\frac{k}{n}} \qquad$ *dla każdego* $\ x \in I$;

(ii) $\quad |f^{(k)}(x)| < 16(2e)^k (M_0)^{1-\frac{k}{n}} (M_n')^{\frac{k}{n}} \qquad$ *dla* $\; x = \frac{a+b}{2}$.

Jeśli zastąpimy przedział I którymkolwiek z przedziałów $(0,\infty)$, $(-\infty,\infty)$, kładąc wtedy $M_n' := M_n$, wówczas zachodzi (i), a ponadto w przypadku przedziału $(-\infty,\infty)$ dla każdego $x \in (-\infty,\infty)$ zachodzi nierówność w (ii).

Twierdzenie 1.9. ***(nierówność Bernoulliego)*** *Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, i niech x_k, $k=1,2,\ldots,n$, będą liczbami rzeczywistymi, takimi że $(\forall k)(-1 < x_k \leqslant 0)$ lub $(\forall k)(0 \leqslant x_k)$. Wówczas*

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Twierdzenie 1.10. ***(Lagrange'a o wartości średniej)*** *Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oraz f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalną w (a,b). Wtedy*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

dla pewnego $c \in (a,b)$.

Twierdzenie 1.11. ***(Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej)*** *Niech X będzie przestrzenią mierzalną, zaś μ — miarą dodatnią na X. Załóżmy, że $(f_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ jest takim ciągiem zespolonych funkcji mierzalnych na X, że granica*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

istnieje dla każdego $x \in X$. Jeżeli istnieje funkcja $g \in L^1(\mu)$ taka, że

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \qquad (n = 1,2,3,\ldots; \;\; x \in X),$$

to $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w [RW].

Definicja 1.12. **Jądrem Poissona na górnej półpłaszczyźnie** nazywamy rodzinę $\{P_y \colon\ y > 0\}$ funkcji $P_y : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ określonych wzorem

$$P_y(x) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}.$$

Definicja 1.13. Załóżmy, że Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$ (który możemy utożsamić z podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$) oraz f jest funkcją z Ω w $\mathbb{C}$ mającą pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Funkcję f nazywamy **harmoniczną**, jeżeli f jest ciągła oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Fakt 1.14. *Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$, zaś $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcją holomorficzną. Wtedy każda z funkcji f, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ jest harmoniczna.*

Rozdział 2

Główny wynik

W tym rozdziale zaprezentujemy konstrukcję funkcji klasy Gevrey z dodatkowymi własnościami opisanymi we wstępie. Ostateczną definicję tej funkcji podajemy w dowodzie twierdzenia 2.17. Wiem z rozmowy z promotorem, że nasze podejście nie jest nowe, nie znamy jednak żadnej referencji z napisanym kompletnym dowodem.

Lemat 2.1. *Niech $(B_n)_n$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Niech f będzie funkcją holomorficzną w zbiorze H oraz taką, że dla pewnej stałej $C > 0$ zachodzi*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in H) \;\; |f(z)| \leqslant CB_n|z|^n. \tag{2.2}$$

Wówczas dla $k \in \mathbb{N}$, $y \in (0, \infty)$ mamy oszacowanie

$$|f^{(k)}(iy)| \leqslant C2^k k! B_k.$$

Dowód. Weźmy dowolne $k \in \mathbb{N}$, $y \in (0, \infty)$.
Mamy $D(iy, y) \subseteq H$ oraz dla $z \in D(iy, y)$ mamy

$$|z| \leqslant |z - iy| + |iy| < 2y,$$

$$|f(z)| \leqslant CB_k|z|^k \leqslant CB_k(2y)^k.$$

Stosując dla k-tej pochodnej nierówność Cauchy'ego (która jest spełniona również w przypadku $k = 0$) otrzymujemy

$$|f^{(k)}(iy)| \leqslant \frac{k!CB_k(2y)^k}{y^k} = C2^k k! B_k.$$

□

Lemat 2.3. *Załóżmy, że Ω jest otwartym, spójnym, niepustym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{C}$. Niech g będzie funkcją z $\overline{\Omega}$ w $\mathbb{C}$, taką że $|g|$ jest ciągła na zbiorze $\overline{\Omega}$ oraz g jest holomorficzna w Ω. Wtedy dla każdego $z \in \Omega$ mamy*

$$|g(z)| \leqslant \max_{w \in \partial\Omega} |g(w)|.$$

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $|g(z_1)| > \max_{w\in\partial\Omega} |g(w)|$ dla pewnego $z_1 \in \Omega$. $\overline{\Omega}$ jest zbiorem zwartym, więc funkcja $|g|$ osiąga maksimum w pewnym punkcie z_2. Z nierówności $|g(z_2)| \geqslant |g(z_1)| > \max_{w\in\partial\Omega} |g(w)|$ wynika, że $z_2 \in \Omega$. Na podstawie wniosku 1.4, funkcja g jest na zbiorze Ω stale równa $g(z_2)$. To zaś implikuje, że $|g|$ jest na zbiorze $\overline{\Omega}$ stale równa $|g(z_2)|$, co przeczy nierówności $|g(z_2)| > \max_{w\in\partial\Omega} |g(w)|$. $\square$

Lemat 2.4. *Niech $(B_n)_n$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Niech f będzie funkcją holomorficzną i ograniczoną w zbiorze H, taką że $|f|$ jest ciągła na brzegu oraz dla pewnej stałej $C > 0$ zachodzi*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; |f(x)| \leqslant CB_n|x|^n.$$

Wówczas spełniony jest warunek 2.2.

Dowód. Jeśli funkcja f jest stale równa zero na zbiorze $\overline{H}$, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\overline{H}} |f(z)| > 0$.

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ określmy funkcję $g_\varepsilon : \overline{H} \to \mathbb{C}$ wzorem

$$g_\varepsilon(z) := \frac{f(z)}{i + \varepsilon z}.$$

Zdefiniujmy również półkole $\Omega_\varepsilon := H \cap D(0, \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon CB_0})$.
Weźmy dowolne $z \in \overline{H} \setminus \Omega_\varepsilon$. Mamy $|z| \geqslant \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon CB_0}$ lub $z \in \mathbb{R}$.
Jeśli $|z| \geqslant \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon CB_0}$, to

$$|g_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{|i + \varepsilon z|} \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{|\varepsilon z|} \leqslant CB_0.$$

Jeśli zaś $z \in \mathbb{R}$, to z założenia $|f(z)| \leqslant CB_0$ oraz

$$|g_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{CB_0}{|i+\varepsilon z|} \leqslant CB_0.$$

Zatem $|g_\varepsilon| \leqslant CB_0$ na zbiorze $\overline{H} \setminus \Omega_\varepsilon$. Stosując lemat 2.3 do Ω_ε oraz g_ε, otrzymujemy, że $|g_\varepsilon| \leqslant CB_0$ także na zbiorze Ω_ε.
Stąd dla dowolnych $z \in H$ i $\varepsilon > 0$ mamy

$$\frac{|f(z)|}{|i+\varepsilon z|} \leqslant CB_0$$

i biorąc $\varepsilon \to 0^+$ dostajemy

$$|f(z)| \leqslant CB_0.$$

Ustalmy teraz dowolne naturalne $n \geqslant 1$.
Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ określmy funkcję $g_{n,\varepsilon} : \overline{H} \to \mathbb{C}$ jako

$$g_{n,\varepsilon}(z) := \frac{f(z)}{(z+i\varepsilon)^n}.$$

Niech $\Omega_n := H \cap D(0, \sqrt[n]{\frac{\|f\|_\infty}{CB_n}})$.
Weźmy dowolne $z \in \overline{H} \setminus \Omega_n$.
Jeśli $|z| \geqslant \sqrt[n]{\frac{\|f\|_\infty}{CB_n}}$, to

$$|g_{n,\varepsilon}(z)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{|z+i\varepsilon|^n} \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{|z|^n} \leqslant CB_n.$$

Jeśli zaś $z \in \mathbb{R}$, to z założenia $|f(z)| \leqslant CB_n|z|^n \leqslant CB_n|z+i\varepsilon|^n$, a stąd

$$|g_{n,\varepsilon}(z)| \leqslant CB_n.$$

Zatem $|g_{n,\varepsilon}| \leqslant CB_n$ na zbiorze $\overline{H} \setminus \Omega_n$. Korzystając z lematu 2.3, dostajemy $|g_{n,\varepsilon}| \leqslant CB_n$ na zbiorze Ω_n.
Stąd dla dowolnych $z \in H$ i $\varepsilon > 0$ mamy

$$\frac{|f(z)|}{|z+i\varepsilon|^n} \leqslant CB_n$$

i biorąc $\varepsilon \to 0^+$ uzyskujemy

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} \leqslant CB_n.$$

$\square$

Definicja 2.5. Dla dowolnego $\gamma \in (0,\infty)$ zdefiniujmy ciąg $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_{\gamma,n})_{n\in\mathbb{N}}$ wzorem

$$A_n := n^{\gamma n}.$$

Lemat 2.6. *Dla każdego $\gamma \in (0,\infty)$ ciąg $(A_n)_n$ jest logarytmicznie wypukły.*

Dowód. Pokażemy, że $A_n^2 \leqslant A_{n-1}A_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.
Dla $n = 1$ mamy

$$A_n^2 = 1 \leqslant 1 \cdot 4^\gamma = A_{n-1}A_{n+1}.$$

Dla $n \geqslant 2$, korzystając z nierówności Bernoulliego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{A_n^2}{A_{n-1}A_{n+1}} &= \frac{(n^{\gamma n})^2}{(n-1)^{\gamma(n-1)}(n+1)^{\gamma(n+1)}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^\gamma \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\gamma n} = \\ &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^\gamma \left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)^{-\gamma} \leqslant \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^\gamma \left(1-n\frac{1}{n^2}\right)^{-\gamma} = \\ &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^\gamma \left(\frac{n}{n-1}\right)^\gamma = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\gamma \leqslant 1.\end{aligned}$$

□

Lemat 2.7. *Niech $\gamma \in (0,\infty)$ będzie ustalone. Następujące warunki są równoważne:*

(a) funkcja $x \mapsto \min_{n\in\mathbb{N}}(\log A_n + n\log|x|)$ należy do $L^1(\mathbb{R})$,

(b) $\gamma \in (1,\infty)$.

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $u_0 : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty)$,

$$u_0(x) := \begin{cases} -\infty & \text{dla } x = 0, \\ \min_{n\in\mathbb{N}}(\log A_n + n\log|x|) & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Mamy do pokazania, że $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \gamma \in (1,\infty)$. Pokażemy więcej, bo to nam się przyda w dowodzie następnego lematu.

Dla dowolnego $c \in (0, \infty)$ niech $g_c : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$g_c(t) := \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, \\ \gamma t \log t + t \log c & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

Funkcja g_c jest ciągła.
Dla $t \in (0, \infty)$ mamy

$$g_c'(t) = \gamma(\log t + 1) + \log c,$$

$$g_c'(t) = 0 \quad \iff \quad t = e^{-1} c^{-\gamma^{-1}}.$$

Oznaczmy $t_c := e^{-1} c^{-\gamma^{-1}}$.
Mamy $g_c'(t) < 0$ dla $t \in (0, t_c)$ i $g_c'(t) > 0$ dla $t \in (t_c, \infty)$.
Zatem g_c jest malejąca na $[0, t_c]$ i rosnąca na $[t_c, \infty)$.

Niech $M, \widetilde{M} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$M(c) := \min_{n \in \mathbb{N}} g_c(n), \qquad \widetilde{M}(c) := \min_{t \in [0,\infty)} g_c(t).$$

Dla każdego $c > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(c) = g_c(t_c) = \gamma t_c \log t_c + t_c \log c = t_c(\gamma(\log t_c + 1) + \log c - \gamma) = \\ = t_c(g_c'(t_c) - \gamma) = e^{-1} c^{-\gamma^{-1}}(0 - \gamma) = -\gamma e^{-1} c^{-\gamma^{-1}} \end{aligned}$$

oraz $M(c) \leqslant g_c(0) = 0$. Ponadto dla $t > 0$ mamy $g_c(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = c^{-\gamma^{-1}}$.
Dalej, jeśli $c \geqslant 1$, to

$$c^{-\gamma^{-1}} \leqslant 1 < 2 < 3 < \dots$$

oraz

$$0 \leqslant g_c(1) < g_c(2) < g_c(3) < \dots$$

a stąd $M(c) = 0$.

Udowodnimy teraz, że funkcja M jest ciągła, poprzez pokazanie jej ciągłości na zbiorze (a, ∞) dla każdego $a > 0$.
Dla dowolnego $c > a$ mamy $t_c < t_a \leqslant \lceil t_a \rceil =: N_a$, a więc minimum funkcji g_c na zbiorze liczb naturalnych jest osiągnięte dla pewnego $n \leqslant N_a$. Zatem $M(c) = \min_{n \in \{0,1,\dots,N_a\}} g_c(n)$.
Stąd funkcja M jest ciągła na zbiorze (a, ∞) jako minimum skończenie wielu funkcji ciągłych $c \mapsto g_c(n)$.

Dalej, ponieważ funkcja M zeruje się na zbiorze $[1,\infty)$, więc jej całkowalność jest równoważna całkowalności na przedziale $(0,1)$.
Z uwagi na równość $\lim_{c\to 0^+} t_c = \infty$, istnieje $d \in (0,1)$, takie że $t_c \geqslant 2$ dla $0 < c < d$.
Mamy $-\gamma e^{-1}c^{-\gamma^{-1}} = \widetilde{M}(c) \leqslant M(c) \leqslant 0, \quad c \in (0,\infty)$, zatem:

(i) funkcja M jest całkowalna na przedziale $(0,1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalna na przedziale $(0,d)$;

(ii) $\widetilde{M}$ jest całkowalna na $(0,d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \in (1,\infty)$.

Jeśli pokażemy, że (implikacja w jedną stronę jest oczywista z nierówności $\widetilde{M} \leqslant M \leqslant 0$)

$$\int\limits_0^d |\widetilde{M}| < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int\limits_0^d |M| < \infty,$$

to dostaniemy, że $M \in L^1(0,\infty) \ \Leftrightarrow \ \gamma \in (1,\infty)$.

Wystarczy pokazać, że $\int_0^d (M - \widetilde{M}) < \infty$.
Weźmy dowolne $c \in (0,d)$ oraz dowolne s, takie że $0 < |s - t_c| \leqslant 1$.
Stosując dwukrotnie twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, dla pewnego r spomiędzy s i t_c oraz pewnego u spomiędzy r i t_c mamy

$$|g_c(s) - g_c(t_c)| \leqslant |g_c'(r)| = |g_c'(r) - g_c'(t_c)| \leqslant |g_c''(u)| = \gamma\frac{1}{u} \leqslant \gamma\frac{1}{t_c - 1} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma\frac{1}{t_c - \frac{1}{2}t_c} = 2\gamma\frac{1}{t_c} = 2\gamma e c^{\gamma^{-1}}.$$

Mamy $M(c) = g_c(\lfloor t_c \rfloor)$ lub $M(c) = g_c(\lceil t_c \rceil)$, zatem korzystając z ostatnich obliczeń dostajemy

$$M(c) - \widetilde{M}(c) \leqslant 2\gamma e c^{\gamma^{-1}}. \tag{2.8}$$

Stąd

$$\int\limits_0^d \Big(M(c) - \widetilde{M}(c)\Big)\,\mathrm{d}c \leqslant 2\gamma e \int\limits_0^d c^{\gamma^{-1}}\mathrm{d}c < \infty.$$

Wróćmy teraz do funkcji u_0. Zauważmy, że $u_0(x) = M(|x|)$ dla $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zatem

(i) u_0 jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(ii) $u_0 \leqslant 0$,

(iii) $u_0(x) = 0$ dla $|x| \geqslant 1$,

(iv) $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \gamma \in (1, \infty)$.

$\square$

Lemat 2.9. *Niech $\gamma > 1$ będzie ustalone. Istnieje funkcja u określona na $\overline{H}$, taka że*

(i) u jest harmoniczna w H;

(ii) u jest ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(iii) $u(x) \leqslant \log A_n + n \log |x|$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$;

(iv) funkcja $f := e^{u+iv}$ spełnia założenia lematu 2.4, gdzie $u+iv$ jest funkcją holomorficzną w H.

Stąd wynika, że klasa $C\{n!A_n\}$ nie jest quasi-analityczna.

Dowód. Niech u_0 będzie funkcją zdefiniowaną w dowodzie lematu 2.7.

Korzystając z całkowalności funkcji u_0 oraz z nierówności $\frac{1}{|z-t|} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ dla $z \in H$, $\quad t \in \mathbb{R}$, możemy określić funkcję $\tau : H \to \mathbb{C}$,

$$\tau(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{i}{\pi} \frac{1}{z-t} u_0(t) dt.$$

Funkcja τ jest holomorficzna. Rzeczywiście, dla $z \in H$ oraz $h \in \mathbb{C}$, takiego że $0 < |h - z| < \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z)$, mamy $\operatorname{Im}(z+h) > \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z)$ oraz

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{i}{\pi} \frac{1}{z+h-t} - \frac{i}{\pi} \frac{1}{z-t} \right) \right| = \left| \frac{i}{\pi} \frac{-1}{(z+h-t)(z-t)} \right| \leqslant \frac{2}{\pi \operatorname{Im}(z)^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a więc (korzystając z definicji Heinego granicy funkcji) z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dostajemy

$$\frac{\tau(z+h) - \tau(z)}{h} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} \left(\frac{i}{\pi} \frac{1}{z+h-t} - \frac{i}{\pi} \frac{1}{z-t} \right) u_0(t) dt \xrightarrow{h \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{i}{\pi} \frac{-1}{(z-t)^2} u_0(t) dt.$$

Dla $z \in H$, $\quad x := \operatorname{Re}(z)$, $\quad y := \operatorname{Im}(z)$, mamy

$$\frac{i}{\pi} \frac{1}{z-t} = \frac{i(\overline{z-t})}{\pi |z-t|^2} = \frac{i(x-t) + y}{\pi((x-t)^2 + y^2)}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{Re}(\tau(z)) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}\Big(\frac{i}{\pi}\,\frac{1}{z-t}\Big)\, u_0(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\pi((x-t)^2+y^2)} u_0(t)dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)u_0(t)dt = P_y * u_0\ (x).$$

Określmy funkcję $u : \overline{H} \to [-\infty, \infty)$ wzorem

$$u(x+iy) := \begin{cases} u_0(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R},\ \ y = 0, \\ P_y * u_0\ (x) & \text{dla } x \in \mathbb{R},\ \ y > 0. \end{cases}$$

Na podstawie faktu 1.14 funkcja u jest harmoniczna w H.
Zauważmy, że z niedodatniości funkcji u_0 otrzymujemy niedodatniość funkcji u.

Pokażemy teraz, że u jest ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz że $\lim_{z\to 0} u(z) = -\infty$. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego $y > 0$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}} P_y(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,\frac{1}{y}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2}dt = 1$$

oraz dla dowolnego $\eta > 0$ mamy

$$\int_{|x|\geqslant\eta} P_y(x)dx = \int_{|x|\geqslant\eta} \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,\frac{1}{y}dx = \int_{|t|\geqslant\eta/y} \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2}dt \overset{y\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Dalej, korzystając z nierówności 2.8 dostajemy

$$u_0(x) = M(|x|) \leqslant \widetilde{M}(|x|) + 2\gamma e|x|^{\gamma^{-1}} = -\gamma e^{-1}|x|^{-\gamma^{-1}} + 2\gamma e|x|^{\gamma^{-1}} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

W szczególności, $\|u_0\|_1 > 0$.

Weźmy dowolne $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta_1 \in (0, |x_0|)$, taka że

$$(\forall x \in \mathbb{R})\Big(\ |x - x_0| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_0(x) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \Big).$$

Istnieje $\delta_2 \in (0,\ \frac{\varepsilon}{3}\,\frac{\pi(\delta_1/2)^2}{\|u_0\|_1})$, taka że

$$(\forall y > 0)\left(\ y < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |u_0(x_0)| \int_{|t|\geqslant\delta_1/2} P_y(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Niech $\delta := \min\{\frac{\delta_1}{2}, \delta_2\}$. Weźmy dowolne $z \in \overline{H}$, takie że $|z - x_0| < \delta$, i oznaczmy $x := \operatorname{Re}(z)$, $y := \operatorname{Im}(z)$. Wtedy $|x - x_0| < \frac{\delta_1}{2}$, $y < \delta_2$.

Wystarczy sprawdzić przypadek $z \in H$. Mamy $y > 0$ oraz

$$|u(z) - u(x_0)| = |u_0 * P_y\ (x) - u_0(x_0)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} (u_0(x-t) - u_0(x_0))\, P_y(t) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|t|<\delta_1/2} |u_0(x-t) - u_0(x_0)|\, P_y(t)dt + \int\limits_{|t|\geqslant\delta_1/2} |u_0(x-t) - u_0(x_0)|\, P_y(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} \int\limits_{|t|<\delta_1/2} P_y(t)dt + \int\limits_{|t|\geqslant\delta_1/2} |u_0(x-t)|\, \frac{1}{\pi}\, \frac{y}{y^2+t^2} dt + \int\limits_{|t|\geqslant\delta_1/2} |u_0(x_0)|\, P_y(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{\pi}\, \frac{\delta_2}{(\delta_1/2)^2} \int\limits_{|t|\geqslant\delta_1/2} |u_0(x-t)|\, dt + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \delta_2 \frac{\|u_0\|_1}{\pi(\delta_1/2)^2} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Weźmy teraz dowolne $K < 0$. Istnieje $\delta_1 > 0$, taka że

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\ 0 < |x| < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad u_0(x) < 2K\ ).$$

Istnieje $\delta_2 > 0$, taka że

$$(\forall y > 0) \left(y < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_{|t|\geqslant\delta_1/2} P_y(t)dt < \frac{1}{2} \right).$$

Niech $\delta := \min\{\frac{\delta_1}{2}, \delta_2\}$. Weźmy dowolne $z \in \overline{H}$, $0 < |z| < \delta$, i niech $x := \mathrm{Re}(z)$, $y := \mathrm{Im}(z)$. Wtedy $|x| < \frac{\delta_1}{2}$, $y < \delta_2$.
Wystarczy sprawdzić przypadek $z \in H$. Mamy $y > 0$ oraz

$$u(z) = u_0 * P_y\ (x) = \int\limits_{|t|<\delta_1/2} u_0(x-t)P_y(t)dt + \int\limits_{|t|\geqslant\delta_1/2} u_0(x-t)P_y(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant 2K \int\limits_{|t|<\delta_1/2} P_y(t)dt < 2K \cdot \frac{1}{2} = K.$$

Ponieważ $u{\restriction_{\mathbb{R}}} = u_0$, więc dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy

$$u(x) \leqslant \log A_n + n \log |x|.$$

Definiujemy funkcje $v : \overline{H} \to \mathbb{R}$, $f : \overline{H} \to \mathbb{C}$ następująco:

$$v(z) := \begin{cases} \operatorname{Im}(\tau(z)) & \text{dla } z \in H, \\ 0 & \text{dla } z \in \mathbb{R}; \end{cases}$$
$$f := e^{u+iv} \qquad (\text{przyjmując, że } e^{-\infty} = 0).$$

Funkcja $u + iv$ jest holomorficzna w H.
Funkcja f spełnia $|f| = e^u$; dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$|f(x)| \leqslant A_n |x|^n.$$

Ponadto $|f|$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}$, f jest holomorficzna w H oraz $|f| \leqslant e^0 = 1$.

Stąd f spełnia założenia lematu 2.4 (dla $(B_n)_n := (A_n)_n$ i $C := 1$). Zatem, korzystając z lematu 2.1, dla $k \in \mathbb{N}$ i $y > 0$ mamy

$$|f^{(k)}(iy)| \leqslant 2^k k! A_k.$$

Podobną metodą, jaka została użyta w dowodzie lematu 2.1, można wykazać, że dla $k \in \mathbb{N}$ i $y > 0$,

$$|f^{(k)}(iy)| \leqslant \frac{k! \cdot A_{k+2}(2y)^{k+2}}{y^k} = k! A_{k+2} 2^{k+2} y^2.$$

Pokażemy teraz, że klasa $C\{n! A_n\}$ nie jest quasi-analityczna.

Niech $I := [0,1]$ oraz $F : I \to \mathbb{C}$, $F(0) := 0$, $F(t) := f(it)$ dla $t \in (0,1]$. Funkcja F nie jest tożsamościowo równa zero: $F(1) = f(i) = e^{\tau(i)} \neq 0$.

Udowodnimy przez indukcję, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(2.10) $$F^{(n)}(t) \text{ istnieje i jest równa } i^n f^{(n)}(it) \text{ dla } t \in (0,1].$$

Dla $n=0$ 2.10 wynika z definicji funkcji F.
Dla $n \geqslant 0$ spełniającego 2.10 mamy

$$\lim_{h\to 0} \frac{F^{(n)}(t+h) - F^{(n)}(t)}{h} = i^{n+1} \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(it+ih) - f^{(n)}(it)}{ih} = i^{n+1} f^{(n+1)}(it).$$

Stąd $F\restriction_{(0,1]} \in C^\infty(0,1]$ oraz $|F^{(n)}(t)| = |f^{(n)}(it)| \leqslant 2^n n! A_n$, $t \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Teraz pokażemy przez indukcję, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(2.11) $$F^{(n)}(0) \text{ istnieje i jest równa } 0.$$

Dla $n=0$ 2.11 wynika z definicji F.
Dla $n\geqslant 0$ spełniającego 2.11 mamy

$$\left|\frac{F^{(n)}(h)-F^{(n)}(0)}{h}\right| = h^{-1}|F^{(n)}(h)| = h^{-1}|f^{(n)}(ih)| \leqslant n!A_{n+2}2^{n+2}h \xrightarrow{h\to 0^+} 0.$$

Otrzymaliśmy zatem, że $F\in C\{n!A_n\}$ oraz $(F^{(n)}(0))_n = 0$. □

Definicja 2.12. Dla dowolnego $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$, zdefiniujmy stożek $\Gamma=\Gamma_p$ jako

$$\Gamma := \left\{(x,y)\in H: \quad |x| < \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}\right) y\right\}.$$

Lemat 2.13. ***(odpowiednik lematu 2.1 dla stożka*** Γ***)***
Niech $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$, *będzie ustalone.*
Załóżmy, że $(B_n)_n$ *jest ciągiem liczb dodatnich, logarytmicznie wypukłym oraz spełniającym* $B_0 = 1$.
Załóżmy, że $g:\Gamma\to\mathbb{C}$ *jest funkcją holomorficzną, taką że dla pewnego* $C>0$ *zachodzi*

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall z\in\Gamma) \quad |g(z)| \leqslant CB_n|z|^{np}.$$

Niech $\beta_p := (1+\sin\frac{\pi}{2p})/(\sin\frac{\pi}{2p})$.
Wtedy

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\forall y>0) \quad |g^{(k)}(iy)| \leqslant C{\beta_p}^k k!{B_k}^{1/p}.$$

Dowód. Ustalmy dowolne $y>0$.
Dla $k=0$ mamy z założeń

$$|g^{(k)}(iy)| = |g(iy)| \leqslant CB_0|iy|^{0\cdot p} = C = C{\beta_p}^k k!{B_k}^{1/p}.$$

Dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 1$, oznaczmy $m:=\frac{k}{p}$, $\underline{m}:=\lfloor m\rfloor$, $\overline{m}:=\underline{m}+1$. Zauważmy, że

$$\Gamma = \left\{re^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}: \quad r>0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2p}\right\}. \tag{2.14}$$

Niech $r_{p,y}$ oznacza największą liczbę dodatnią r, taką że $D(iy,r)\subseteq\Gamma$. Wtedy $r_{p,y}$ jest odległością punktu iy od prostej $\{tie^{i\pi/(2p)}:\ t\in\mathbb{R}\}$, a więc $r_{p,y} =$

$y\sin\frac{\pi}{2p}$.
Weźmy dowolne $z\in D(iy,\, r_{p,y})$. Mamy

$$|z|\leqslant|iy|+|z-iy|<y+r_{p,y}=y(1+\sin\frac{\pi}{2p})=:R_{p,y},$$

zatem

$$|g(z)|\leqslant CB_{\underline{m}}|z|^{\underline{m}p}\leqslant CB_{\underline{m}}{R_{p,y}}^{\underline{m}p},$$
$$|g(z)|\leqslant CB_{\overline{m}}|z|^{\overline{m}p}\leqslant CB_{\overline{m}}{R_{p,y}}^{\overline{m}p}.$$

Ponieważ $(\overline{m}-m)+(m-\underline{m})=1$, więc z powyższych nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned}|g(z)|&\leqslant (CB_{\underline{m}}{R_{p,y}}^{\underline{m}p})^{\overline{m}-m}\cdot(CB_{\overline{m}}{R_{p,y}}^{\overline{m}p})^{m-\underline{m}}=\\&=C{B_{\underline{m}}}^{\overline{m}-m}{B_{\overline{m}}}^{m-\underline{m}}{R_{p,y}}^{pm(-\underline{m}+\overline{m})}=\\&=C{B_{\underline{m}}}^{\overline{m}-m}{B_{\overline{m}}}^{m-\underline{m}}{R_{p,y}}^{k}.\end{aligned}$$

Pokażemy, że $B_{\underline{m}}\leqslant {B_k}^{\underline{m}/k}$, $B_{\overline{m}}\leqslant {B_k}^{\overline{m}/k}$, a wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned}|g(z)|&\leqslant C{B_k}^{\underline{m}/k\cdot(\overline{m}-m)}{B_k}^{\overline{m}/k\cdot(m-\underline{m})}{R_{p,y}}^{k}=\\&=C{B_k}^{(\underline{m}\overline{m}-\underline{m}m+\overline{m}m-\overline{m}\underline{m})/k}{R_{p,y}}^{k}=\\&=C{B_k}^{(-\underline{m}+\overline{m})m/(pm)}{R_{p,y}}^{k}=\\&=C{B_k}^{1/p}{R_{p,y}}^{k}.\end{aligned}$$

Jeśli $k\geqslant 2$, to $m=\frac{k}{p}\leqslant\frac{k}{2}=k-\frac{k}{2}\leqslant k-1$, zatem $\overline{m}\leqslant m+1\leqslant k$.
Jeśli zaś $k=1$, to $\overline{m}=\lfloor m\rfloor+1=\lfloor\frac{1}{p}\rfloor+1=1=k$.
W obu przypadkach dostajemy $\underline{m}\leqslant\overline{m}\leqslant k$, zatem dla $j\in\{\underline{m},\overline{m}\}$ mamy

$$B_j\leqslant (B_0)^{\frac{k-j}{k}}(B_k)^{\frac{j}{k}}=(B_k)^{\frac{j}{k}}.$$

Dalej, z nierówności Cauchy'ego dla k-tej pochodnej otrzymujemy

$$|g^{(k)}(iy)|\leqslant\frac{k!\cdot C{B_k}^{1/p}{R_{p,y}}^{k}}{{r_{p,y}}^{k}}=C\left(\frac{R_{p,y}}{r_{p,y}}\right)^{k}k!{B_k}^{1/p}=C{\beta_p}^{k}k!{B_k}^{1/p}.$$

$\square$

Wniosek 2.15. ***(z dowodu)*** *Dla* $k \in \mathbb{N}$ *i* $y > 0$ *zachodzi również*

$$|g^{(k)}(iy)| \leqslant \frac{k! \cdot C{B_{k+2}}^{1/p}{R_{p,y}}^{k+2}}{{r_{p,y}}^k} = k!C{B_{k+2}}^{1/p}{\beta_p}^k{R_{p,y}}^2.$$

Lemat 2.16. *Niech* $\gamma > 1$ *oraz* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, *będą ustalone.*
Istnieje funkcja holomorficzna $f_1 : \Gamma \to \mathbb{C}$, *taka że*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in \Gamma) \quad |f_1(z)| \leqslant A_n|z|^{np}.$$

Ponadto klasa $C\{n!A_n^{1/p}\}$ *nie jest quasi-analityczna.*

Dowód. Niech $f : \overline{H} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją zdefiniowaną w dowodzie lematu 2.9.
Na podstawie równości 2.14 możemy określić wzajemnie jednoznaczną funkcję $\phi : \Gamma \to H$, $\phi(z) := i(\frac{z}{i})^p$.
Określmy funkcję holomorficzną $f_1 : \Gamma \to \mathbb{C}$, $f_1(z) := f(\phi(z))$.
Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $z \in \Gamma$ mamy

$$|f_1(z)| = |f(i(\tfrac{z}{i})^p)| \leqslant A_n|i(\tfrac{z}{i})^p|^n = A_n|z|^{np}.$$

Otrzymujemy, że ciąg $(A_n)_n$ i funkcja f_1 spełniają założenia lematu 2.13 ze stałą C równą 1, zatem — korzystając z tezy tego lematu oraz z wniosku 2.15 — dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ i $y > 0$ mamy

$$|f_1^{(k)}(iy)| \leqslant \beta_p^k k! A_k^{1/p}$$

oraz

$$|f_1^{(k)}(iy)| \leqslant k! A_{k+2}^{1/p} \beta_p^k (1 + \sin\frac{\pi}{2p})^2 y^2.$$

Można więc pokazać podobnie jak w dowodzie lematu 2.9, że funkcja $F_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$, zdefiniowana jako $F_1(0) := 0$, $F_1(t) := f_1(it)$ dla $t \in (0,1]$, należy do klasy $C\{n!A_n^{1/p}\}$ i spełnia $(F_1^{(n)}(0))_n = 0$. Ponadto $F_1(1) = f_1(i) = f(i) \neq 0$, więc F_1 nie jest tożsamościowo równa zero. Stąd wnioskujemy, że klasa $C\{n!A_n^{1/p}\}$ nie jest quasi-analityczna. □

Twierdzenie 2.17. *Niech* $\widetilde{\gamma} > 1$. *Istnieje wtedy niezerowa funkcja* G *klasy* $C\{n^{\widetilde{\gamma}n}\}$ *określona na* $\mathbb{R}$, *analityczna w otoczeniu każdego* $x_0 > 0$ *i spełniająca* $G(x) = 0$ *dla* $x < 0$.

Dowód. Wybierzmy liczbę naturalną $p \geqslant 2$, taką że $p(\widetilde{\gamma}-1) > 1$, i niech $\gamma := p(\widetilde{\gamma}-1)$.
Podobnie, jak w dowodzie lematu 2.16 zdefiniowaliśmy niezerową funkcję F_1 za pomocą funkcji f_1, określmy teraz niezerową funkcję $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wzorem

$$G(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ f_1(ix) & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Funkcja G jest gładka i (z uwagi na nierówność $n! \leqslant n^n$) spełnia oszacowania na n-te pochodne, $n \in \mathbb{N}$:

$$\|G^{(n)}\|_\infty \leqslant \beta_p^n n! A_n^{1/p} = \beta_p^n n! n^{\frac{1}{p}\gamma n} \leqslant \beta_p^n n^n n^{\frac{1}{p}\gamma n} = \beta_p^n n^{\widetilde{\gamma} n}.$$

Analityczność funkcji G w otoczeniu każdego punktu $x_0 > 0$ wynika z tego, że $G\restriction_{(0,\infty)}$ jest obcięciem funkcji holomorficznej

$$i^{-1}\Gamma \ni z \mapsto f_1(iz).$$

$\square$

Bibliografia

[BTh] Bang Th., *The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions*, MATH. SCAND. 1 (1953)

[CPJ] Cohen P. J., *A simple proof of the Denjoy-Carleman theorem*, The American Mathematical Monthly, Jan., 1968, Vol. 75, No. 1 (Jan., 1968), pp. 26-31

[GA] Gorny A., *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle.*, Acta Math. 71 (1939), 317-358

[GG] Góral G., *Podstawowe własności klas quasi-analitycznych i kwantytatywne sformułowanie Twierdzenia Borela*, Uniwersytet Wrocławski, Wydział Matematyki i Informatyki, Instytut Matematyczny, specjalność: Matematyka ogólna, Praca magisterska napisana pod kierunkiem dr. hab. Jacka Zienkiewicza, Wrocław 2020

[HL] Hörmander L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, 2009 [1983], ISBN 978-3-540-00662-6

[RW] Rudin W., *Analiza rzeczywista i zespolona*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Wydanie drugie, Warszawa, 1998, z angielskiego tłumaczyli Antoni Pierzchalski, Paweł Walczak