Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Matematyka aktuarialno-finansowa

Katarzyna Hasal

Martyngałowe metody wyceny opcji

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
profesora Dariusza Buraczewskiego

Wrocław 2021

Spis treści

1 Wstęp

Rynki finansowe są pełne ryzyka, nie wiemy, ile za rok będzie kosztować dany produkt lub usługa. Wyobraźmy sobie właściciela firmy transportowej, który chce wyznaczyć budżet na kolejny rok. Jednak ceny paliw ciągle się zmieniają i istnieje ryzyko, że niespodziewany wzrost cen doprowadzi firmę do bankructwa. Taka firma chciałaby mieć możliwość zakupu paliwa po znanej ustalonej cenie, dzięki czemu może oszacować swoje przyszłe wydatki i zabezpieczyć się przed nadmiernym wzrostem cen. Takim sposobem zneutralizowania wpływu ryzyka na nasze przyszłe dochody jest opcja.

Opcja jest pochodnym instrumentem finansowym, który daje jej właścicielowi (*holder*) możliwość kupna lub sprzedaży ustalonej liczby pewnego instrumentu finansowego w określonym czasie, za ustaloną wcześniej cenę. Gdy posiadacz opcji korzysta z tej możliwości mówimy, że wykonuje on opcję (*exercise an option*). Data, do której można wykonać opcję nazywa się datą wygaśnięcia (*expiration date*), a ustaloną cenę kupna lub sprzedaży będziemy nazywać ceną wykonania (*strike price*). Wyróżnia się dwa typy opcji:

- opcja kupna (*call*),
- opcja sprzedaży (*put*).

Tak więc rozwiązaniem dla firmy transportowej jest zakup opcji *call* na odpowiednią ilość paliwa.

Osoba sprzedająca opcję - wystawca (*writer*) musi określić na jaki instrument wystawia opcję (np. kurs walut, akcje), ilość tego instrumentu, datę wygaśnięcia oraz cenę wykonania. Te wszystkie czynniki wpływają na cenę opcji (*premium*).

Wyróżnia się opcje amerykańskie - jeśli właściciel opcji może ją wykonać w dowolnym momencie przed datą wygaśnięcia, oraz europejskie - możliwość wykonania jedynie w momencie wygaśnięcia.

Głównym celem tej pracy jest odpowiedź na pytanie, ile powinna kosztować opcja. Cena musi być atrakcyjna zarówno dla jej potencjalnego nabywcy oraz wystawcy. Nie może więc dawać pewnego zysku żadnej ze stron. Sytuację, w której jedna ze stron ma pewny zysk nazywamy arbitrażem.

Ten ekonomiczny problem możemy rozwiązać w dyskretnej przestrzeni za pomocą rachunku prawdopodobieństwa. Ważną rolę gra teoria martyngałów, którą przedstawimy krótko na początku pracy. Następnie wprowadzimy matematyczny opis rynku i powiązania między martyngałami a pojęciem arbitrażu.

W kolejnej części przeanalizujemy dyskretny dwumianowy model wyceny opcji europejskich. Będziemy zakładać, że $N \in \mathbb{N}$ odpowiada dacie wygaśnięcia i cena opcji zmienia się w równych odstępach czasu $0 \leqslant n \leqslant N$. Na koniec tego rozdziału rozważymy przypadek graniczny, gdy $N \to \infty$ i otrzymamy jeden z najważniejszych wyników matematyki finansowej - wzór Blacka - Scholesa.

Następnie przejdziemy do opcji amerykańskich, będziemy potrzebować do tego dodatkowych informacji na temat czasów zatrzymania. Dzięki temu będziemy mogli określić w jakich momentach opłaca się wykonać opcję i sprawdzimy jak ta możliwość wcześniejszego wykonania wpływa na cenę.

W pracy będę bazować na książce D. Lambertona i B. Lapeyre'a: *'Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance'*, w której opisane są te metody. Postaram się uporządkować wszystkie niezbędne do zrozumienia problemu pojęcia, opisać jednocześnie ich praktyczną interpretację jak i teoretyczne uzasadnienie.

2 Martyngały

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcia dotyczące martyngałów i udowodnimy kilka twierdzeń, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Będziemy rozważać dyskretną skończoną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ oraz $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Definicja 2.1. *Rodzina pod-σ-ciał $\{\mathcal{F}_n\}_{0 \leqslant n \leqslant N}$ jest nazywana filtracją, jeżeli $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Rodzina zmiennych losowych $\{X_n\}_{0 \leqslant n \leqslant N}$ jest adoptowana do filtracji $\{\mathcal{F}_n\}$, jeżeli X_n jest $\mathcal{F}_n$ mierzalna.*

Definicja 2.2. *Adoptowany ciąg całkowalnych zmiennych losowych $(M_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ jest*

- *martyngałem, gdy $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ dla $n \leqslant N-1$;*
- *podmartyngałem, gdy $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant M_n$ dla $n \leqslant N-1$;*
- *nadmartyngałem, gdy $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant M_n$ dla $n \leqslant N-1$.*

Nasza przestrzeń jest wyposażona w filtrację $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_N$ taką, że $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Definicja 2.3. *Mówimy, że adoptowany ciąg zmiennych losowych $(H_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ jest przewidywalny, gdy dla każdego $n \geqslant 1$ H_n jest $\mathcal{F}_{n-1}$ mierzalne.*

2.1 Transformata martyngałowa, rozkład Doob'a oraz koperta Snella

Twierdzenie 2.4 (Transformata martyngałowa)**.** *Niech $(M_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ będzie martyngałem, a $(H_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ przewidywalnym ciągiem zmiennych losowych względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$.*

Niech $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$*, wtedy ciąg* $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *postaci:*

$$X_0 = H_0 M_0$$

$$X_n = H_0M_0 + H_1\Delta M_1 + ... + H_n\Delta M_n \quad \forall n \in \{1, ..., N\}$$

jest martyngałem.

Dowód. (X_n) jest ciągiem $\mathcal{F}_n$ mierzalnym, ponieważ każda zmienna X_n jest sumą $\mathcal{F}_n$ mierzalnych zmiennych.

Dla $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n+1} H_i\Delta M_i|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n} H_i\Delta M_i + H_{n+1}\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] + H_{n+1}\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n]\\ &= X_n + H_{n+1}(\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n])\\ &= X_n + H_{n+1}(M_n - M_n) = X_n\end{aligned}$$

co dowodzi, że (X_n) jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)$ □

Lemat 2.5. *Jeżeli dla każdej zmiennej losowej* $X \in \mathcal{F}$ *oraz każdego* $A \in \mathcal{F}$ *mamy* $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] = 0$*, to* $X = 0$ *p.w.*

Dowód. Niech $A_1 = \{\omega : X(\omega) > 0\} = X^{-1}[(0,\infty)] \in \mathcal{F}$, wtedy $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}X] = 0$ jedynie wtedy gdy $\mathbb{P}(A_1) = 0$, ponieważ na zbiorze A_1 zmienna X przyjmuje wartości ściśle dodatnie.

Analogicznie dla zbioru $A_2 = \{\omega : X(\omega) < 0\} = X^{-1}[(-\infty, 0)] \in \mathcal{F}$ otrzymujemy $\mathbb{P}(A_2) = 0$. Stąd pozostaje, że $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. □

Twierdzenie 2.6. *Adoptowany ciąg zmiennych losowych* (M_n) *jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego przewidywalnego ciągu* (H_n)*, mamy*

$$\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N} H_n\Delta M_n] = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Dowód. Jeżeli (M_n) jest martyngałem, to z twierdzenia 2.4 dla dowolnego przewidywalnego ciągu zmiennych (H_n), ciąg $X_n = \sum_{i=0}^{n} H_i\Delta M_i$ jest martyngałem. Mamy więc $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_N] = \mathbb{E}[X_0] + \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N} H_n\Delta M_n]$, stąd $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N} H_n\Delta M_n] = 0$.

W drugą stronę, ustalmy dowolne $j \in \{1, ..., N\}$ możemy rozważyć ciąg przewidywalnych zmiennych (H_n) zdefiniowanych następująco:

$$H_n = \begin{cases} \mathbb{1}_{Aj} & gdy \quad n = j+1 \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

5:99522

dla dowolnego $\mathcal{F}_j$ mierzalnego zbioru A_j. Wtedy

$$0 = \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Aj}(M_{j+1} - M_j)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{Aj}(M_{j+1} - M_j)|\mathcal{F}_j]]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Aj}(\mathbb{E}[M_{j+1}|\mathcal{F}_j] - M_j)]$$

a stąd korzystając z lematu $\mathbb{E}[M_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j$, więc (M_n) jest martyngałem. □

Twierdzenie 2.7 (Rozkład Doob'a)**.** *Każdy nadmartyngał* $(U_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ *można jednoznacznie zapisać jako:*

$$U_n = M_n - A_n,$$

gdzie (M_n) *- martyngał,* (A_n) *- niemalejący przewidywalny ciąg,* $A_0 = 0$*.*

Dowód. Zdefiniujemy ciągi (A_n) oraz (M_n) indukcyjnie. Niech $A_0 = 0, M_0 = U_0$. Żeby ciągi spełniały $U_n = M_n - A_n$, musi zachodzić:

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n).$$

Dalej warunkujemy to równanie względem $\mathcal{F}_n$ i dostajemy:

$$\mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n] - U_n = M_n - M_n - (A_{n+1} - A_n) = A_n - A_{n+1},$$

ponieważ (M_n) - martyngał a (A_n) - przewidywalne. Stąd wyznaczamy:

$$A_{n+1} = A_n + U_n - \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n],$$

$$M_{n+1} = M_n + U_{n+1} - U_n - \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n] + U_n = M_n + U_{n+1} - \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Dodając do powyższych wzorów warunki początkowe dostajemy jednoznacznie wyznaczone (M_n) i (A_n), które spełniają założenia.

(A_n) jest niemalejące bo $(U_n) \geqslant \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, więc $A_{n+1} - A_n = U_n - \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant 0$. □

Definiujemy kopertę Snella (U_n) ciągu (Z_n) w następujący sposób:

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = max(Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]). \end{cases}$$

Twierdzenie 2.8. *Koperta Snella* $(U_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ *ciągu* $(Z_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ *jest najmniejszym nadmartyngałem ograniczającym* $(Z_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$

Dowód. Z definicji U_n od razu widać, że $\mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant U_n$, więc $(U_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ jest nadmartyngałem, ponadto $U_n \geqslant Z_n$ dla $n \in \{0, ..., N\}$.

Załóżmy, że mamy nadmartyngał $(H_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ ograniczający $(Z_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$. Wtedy na pewno $H_N \geqslant U_N = Z_N$. Możemy tutaj zastosować indukcję wsteczną, załóżmy że $H_{n+1} \geqslant U_{n+1}$. Wtedy:

$$H_n \geqslant \mathbb{E}[H_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n],$$

ponadto wiedząc że $H_n \geqslant Z_n$:

$$H_n \geqslant max(Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = U_n,$$

co dowodzi, że dowolny nadmartyngał $(H_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ ograniczający $(Z_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ ogranicza także $(U_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$

□

3 Dyskretny opis rynku

W tym rozdziale wprowadzimy język, którego będziemy używać w opisie modelu. Operujemy na skończonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest skończonym zbiorem ω - możliwych ewolucji rynku, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Miara $\mathbb{P}$ jest taka, że $\mathbb{P}(\omega) > 0$.

N oznacza datę wygaśnięcia opcji. Zbiór $\{0, 1, ..., N\}$ jest zbiorem wszystkich momentów od teraźniejszości do wygaśnięcia. Filtracja to $\{\mathcal{F}_n : n \in \{0, 1, ..., N\}\}$, gdzie $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ oraz $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Na rynku jest dostępne $d + 1$ instrumentów finansowych $A_0, A_1, ..., A_d$, znamy ich przeszłe i obecne ceny, więc cena w czasie n jest dana przez $\mathcal{F}_n$ mierzalne zmienne losowe $S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d$, oraz mamy wektor cen w czasie n: $S_n = (S_n^0, ..., S_n^d)$.

Instrumenty $A_1, ..., A_d$ nazywamy ryzykownymi. A_0 jest instrumentem pozbawionym ryzyka, możemy o nim myśleć jak o lokacie lub pożyczce, wiemy dokładnie ile zarobimy lub ile będziemy musieli oddać. Zakładamy $S_0^0 = 1$, przy stałej stopie procentowej r w jednym okresie: $S_n^0 = (1 + r)^n$. Oznaczamy $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ - czynnik dyskonta z momentu n do 0, $\tilde{S}_n^i := S_n^i \beta_n = (1 + r)^{-n} S_n^i$ - zdyskontowana cena instrumentu A^i. Stąd też $\tilde{S}_n^0 = 1$.

3.1 Strategie handlowe

Definicja 3.1. *Strategia handlowa to ciąg* $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0\leqslant n\leqslant N}$, *gdzie* ϕ_n^i *jest liczbą posiadanych w portfelu instrumentów* A_i *w chwili* n.

Inwestor o ilości poszczególnych instrumentów w portfelu w chwili n decyduje posiadając informacje z chwili $n - 1$, stąd ϕ jest przewidywalne.

Przez portfel rozumiemy zbiór posiadanych ryzykownych i bezpiecznych instrumentów. Wartość portfela w chwili n oznaczamy:

$$V_n(\phi) = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i = \phi_n \cdot S_n,$$

a jego zdyskontowaną wartość $\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n V_n(\phi) = \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot (\beta_n S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n$, gdzie $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny, a $\tilde{S}_n = \beta_n S_n$ jest wektorem zdyskontowanych cen.

Definicja 3.2. *Strategię nazywamy samofinansującą, gdy spełniona jest zależność:*

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n, \quad \forall n \in \{0, 1, ..N-1\}.$$

Czyli gdy podane są nowe ceny, nie wyciągamy ani nie wkładamy do portfela żadnych środków z zewnątrz. W momencie tuż przed podaniem nowych cen S_n, stan naszego portfela to ϕ_n. Gdy poznajemy ceny S_n możemy zmienić skład naszego portfela na ϕ_{n+1} w ten sposób, by nie zmienić tymi operacjami jego wartości.

Twierdzenie 3.3. *NWSR:*
(1) strategia ϕ jest samofinansująca,
(2) $V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \Delta S_i$,
(3) $\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i$.

Dowód. (1) jest równoważne:

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1}(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \Delta S_{n+1},$$

co oznacza, że zmiana wartości portfela $(V_{n+1} - V_n)$ jest wynikiem zmiany cen między chwilą n oraz $n+1$ (ΔS_{n+1}).

Dalej możemy napisać równoważnie, że

$$V_n = V_n - V_{n-1} + V_{n-1} - ... - V_0 + V_0 = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \cdot \Delta S_i + V_0,$$

co oznacza, że wartość portfela w chwili n to jego wartość początkowa plus przyrosty spowodowane kolejnymi zmianami cen. Stąd (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Warunek (1) jest też równoważny:

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n \Leftrightarrow \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \beta_n(\phi_{n+1} \cdot S_n) \Leftrightarrow \phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n,$$

więc powtarzając powyższe rozumowanie dla $\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$, oraz wiedząc, że $\tilde{V}_0 = V_0$ dostajemy równoważność (1) i (3). $\square$

Twierdzenie 3.4. *Dla dowolnego przewidywalnego procesu* $((\phi_n^1, ..., \phi_n^d))_{0 \leqslant n \leqslant N}$ *i* $\mathcal{F}_0$ *mierzalnej zmiennej* V_0 *istnieje jedyny przewidywalny proces* $(\phi_n^0)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ *taki, że strategia handlowa* $\phi = (\phi^0, ...\phi^d)$ *jest samofinansująca i jej wartość początkowa to* V_0*.*

Dowód. Z definicji wartości zdyskontowanej portfela mamy:

$$\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + ... + \phi_n^d \tilde{S}_n^d,$$

a z twierdzenia 3.3.(3): $\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i$. Ponieważ $\Delta \tilde{S}_i^0 = \tilde{S}_i^0 - \tilde{S}_{i-1}^0 = 1 - 1 = 0$, przyrównując otrzymujemy:

$$\phi_n^0 = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{n} (\phi_i^1 \Delta \tilde{S}_i^1 + ... + \phi_i^d \Delta \tilde{S}_i^d) - (\phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + ... + \phi_n^d \tilde{S}_n^d)$$

$$= V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{n-1} (\phi_i^1 \Delta \tilde{S}_i^1 + ... + \phi_i^d \Delta \tilde{S}_i^d) - (\phi_n^1 \tilde{S}_{n-1}^1 + ... + \phi_n^d \tilde{S}_{n-1}^d).$$

Więc ϕ_n^0 jest jednoznacznie wyznaczone powyższym równaniem oraz jest $\mathcal{F}_{n-1}$ mierzalne. □

Twierdzenie 3.3 mówi nam, że jeżeli inwestor przyjmie samofinansującą strategię, to zdyskontowana wartość jego portfela jest zależna od jego wartości początkowej oraz ilości posiadanych ryzykownych instrumentów. To znaczy, że ilość bezpiecznego instrumentu nie wpływa na wartość zdyskontowaną portfela. Kupowanie bezpiecznych instrumentów nie przynosi zysków, lecz pozwala się zabezpieczyć w razie wahań cen ryzykownych instrumentów.

Twierdzenie 3.4. podaje wzór na to, ile bezpiecznego instrumentu w danym momencie powinien mieć w portfelu inwestor, czyli żeby strategia wciąż była samofinansująca. Taką strategię zabezpieczającą nazywamy hedgingiem. Ubezpiecza nas on od potencjalnych strat związanych z wahaniami cen instrumentów, ale jednocześnie może ograniczyć potencjalne korzyści.

3.2 Arbitraż a martyngały

W tym podrozdziale przedstawimy dwa bardzo ważne twierdzenia, które łączą czysto finansowe założenia z pojęciem martyngału.

Definicja 3.5. *Strategię* ϕ *nazywamy dopuszczalną, gdy jest samofinansująca oraz* $V_n(\phi) \geqslant 0 \quad \forall n \in \{0, 1, ..., N\}$*.*

Drugi warunek jest wymagany, aby inwestor w każdej chwili był wypłacalny. Wymagamy, żeby gra na rynku była uczciwa, oznacza to, że nie ma możliwości zysku bez ponoszenia ryzyka. Możliwość zysku bez ryzyka nazywamy arbitrażem. Dopuszczalną strategię, która pozwala na taki zysk nazywamy strategią arbitrażową. Jest to taka strategia, która ma początkową wartość równą zero, a końcową większą od 0 z dodatnim prawdopodobieństwem.

Definicja 3.6. *Rynek jest wykonalny, gdy nie istnieje możliwość arbitrażu.*

Założenie braku arbitrażu jest bardzo istotne z ekonomicznego punktu widzenia. Nie chcemy przecież sytuacji na rynku, w której można zarobić pieniądze bez ponoszenia ryzyka. Nawet jeżeli uda się znaleźć taką 'okazję' w praktyce, szybko jest ona korygowana przez mechanizmy rynku. Dlatego większość modeli zakłada wykonalność rynku.

Definicja 3.7. *Mówimy, że miary probabilistyczne $\mathbb{P}$ oraz $\mathbb{P}^*$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0$.*

Uwaga 3.8. *Na skończonej przestrzeni, gdzie każdy element ma dodatnie prawdopodobieństwo, nowa miara $\mathbb{P}^*$ jest równoważna do $\mathbb{P}$, gdy $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ dla każdego $\omega \in \Omega$.*

Twierdzenie 3.9. *Rynek jest wykonalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara $\mathbb{P}^*$ równoważna do $\mathbb{P}$ taka, że zdyskontowane ceny instrumentów są $\mathbb{P}^*$ martyngałami.*

Dowód. *'Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance'* (theorem 1.2.7). □

Powyższe twierdzenie nazywane jest Pierwszym Zasadniczym Twierdzeniem Wyceny Aktywów (*First Fundamental Theorem of Asset Pricing*). Na początku pracy wzięliśmy pewną miarę probabilistyczną $\mathbb{P}$, mówiąc o niej tylko tyle, że dla każdego elementu dyskretnej przestrzeni jest dodatnia. Teraz żądamy, żeby spełnione było założenie wykonalności. Dzięki twierdzeniu wiemy, że istnieje miara z dodatnim prawdopodobieństwem na każdym elemencie przestrzeni, względem której zdyskontowane ceny są martyngałami.

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n \quad \forall n \leqslant N-1$$

Intuicyjnie możemy patrzeć na ten warunek tak, że w każdym momencie j najlepsze oszacowanie zdyskontowanej ceny z przyszłości, jest dane przez obecną cenę.

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_n|\mathcal{F}_j] = \tilde{S}_j \quad \forall j \leqslant n \leqslant N.$$

Gdyby równość nie zachodziła dla pewnego $n \in \{1, .., N-1\}$, mielibyśmy informację, że wartość oczekiwana ceny z przyszłości będzie większa (lub mniejsza) niż cena obecna, dzięki czemu moglibyśmy zakupić (lub sprzedać) ten instrument i sprawić, że wartość oczekiwana naszego zysku zwiększy się, co byłoby strategią arbitrażową.

Uwaga 3.10. *Gdy przyjmujemy strategię samofinansującą zachodzi $\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i \cdot \Delta\tilde{S}_i$, a więc $(\tilde{V}_n(\phi))_{0\leqslant n\leqslant N}$ jest transformatą martyngałową. Z twierdzenia 2.4 ciąg zdyskontowanych wartości portfela samofinansującego jest martyngałem. $\mathbb{E}[\tilde{V}_N] = \mathbb{E}[\tilde{V}_0] = V_0$*

Definicja 3.11. *Niech $h \geqslant 0$ będzie zmienną $\mathcal{F}_N$ mierzalną, oznaczającą możliwy zysk w momencie N. Roszczenie warunkowe zdefiniowane przez h jest osiągalne, jeżeli istnieje dopuszczalna strategia ϕ warta h w czasie N, tzn. $V_N(\phi) = h$.*

Definicja 3.12. *Rynek jest zupełny, jeżeli każde roszczenie warunkowe h jest osiągalne.*

Ta definicja mówi, że możemy zreplikować każdą kwotę, odpowiednio dobierając strategię i wartość początkową portfela. Nie jest to tak jasne intuicyjnie jak założenie braku arbitrażu.

Twierdzenie 3.13. *Wykonalny rynek jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jedyna miara $\mathbb{P}^*$ równoważna $\mathbb{P}$ taka, że zdyskontowane ceny są $\mathbb{P}^*$ martyngałami.*

Dowód. 'Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance' (theorem 1.3.4.) □

Powyższe twierdzenie (*Second Fundamental Theorem of Asset Pricing*) daje jednoznaczność miary, względem której zdyskontowane ceny oraz zdyskontowane wartości portfela są martyngałami.

Możemy wskazać samofinansującą strategię ϕ taką, że $V_N(\phi) = h$. Mamy wtedy:

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}[\tilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{V_N(\phi)}{S_N^0}\Big|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{h}{S_N^0}\Big|\mathcal{F}_n\right],$$

jest to równoważne:

$$V_n(\phi) = S_n^0\tilde{V}_n(\phi) = S_n^0\mathbb{E}\left[\frac{h}{S_N^0}\Big|\mathcal{F}_n\right]. \tag{3.1}$$

Wartość portfela w każdym momencie n zależy od h. Niech h będzie wypłatą z opcji europejskiej. Możemy przyjmować, że $V_n(\phi)$ jest ceną opcji w momencie n, gdyż mając taki kapitał istnieje strategia ϕ generującą h. Wartość instrumentu bazowego w chwili wygaśnięcia N to S_N, cena wykonania K, wtedy:

- $h = C_N = (S_N - K)_+$ dla opcji kupna, gdy $S_N > K$ wykonujemy opcję płacąc K, a następnie sprzedajemy ją za jej aktualną cenę: S_N. Wtedy zysk z tych działań $C_N = S_N - K$. Natomiast gdy $S_N < K$ nie opłaca się wykonywać, czyli płacić za nią K, gdyż jej cena jest aktualnie niższa. Wtedy $C_N = 0$.

- $h = P_N = (K - S_N)_+$ dla opcji sprzedaży.

Korzystając z (3.1) możemy napisać ceny opcji europejskich:

- $C_0 := V_0^c(\phi) = \mathbb{E}[\frac{(S_N-K)_+}{S_N^0}|\mathcal{F}_0] = \frac{\mathbb{E}[(S_N-K)_+]}{(1+r)^N}$ dla opcji *call*,

- $P_0 := V_0^p(\phi) = \mathbb{E}[\frac{(K-S_N)_+}{S_N^0}|\mathcal{F}_0] = \frac{\mathbb{E}[(K-S_N)_+]}{(1+r)^N}$ dla opcji *put*.

W kolejnym rozdziale przedstawimy model dwumianowy, w którym wyznaczymy wolną od arbitrażu miarę probabilistyczną z twierdzenia 3.13 pozwalającą wyliczyć dokładnie powyższe wartości, oraz znaleźć strategię zabezpieczającą ϕ, generującą wypłatę z opcji.

4 Opcje europejskie - model CRR

Model dwumianowy został opisany w roku 1979 przez J. Coxa, S. Rossa i M. Rubinsteina w pracy *Option Pricing: A Simplified Approach*. Opiera się na założeniu braku arbitrażu. Będziemy rozważać sytuację, gdy mamy dostępny jeden ryzykowny instrument (np. akcję), którego cena w momencie n wynosi S_n oraz instrument bez ryzyka ze stałym oprocentowaniem r (np. obligację zerokuponową), przyjmujemy jego cenę w chwili 0: $S_0^0 = 1$, więc w chwili n: $S_n^0 = (1+r)^n$.

Jest to model dwumianowy, rozumiemy przez to, że zmiana ceny ryzykownego instrumentu pomiędzy dwoma kolejnymi okresami dokonuje się na jeden z dwóch możliwych sposobów, gdzie $-1 < a < b$:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}$$

Chcemy skonstruować przestrzeń probabilistyczną. Niech $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$, jej każdy element jest możliwą ścieżką zmian cen. Definiujemy filtrację $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ oraz $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dla $n \in \{1, ..., N\}$: $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, ..., S_n)$. Miara $\mathbb{P}$ jest zdefiniowana tak, żeby dla każdej $\omega \in \Omega$ prawdopodobieństwo było dodatnie.

Znamy cenę początkową S_0, jest to stała więc jest w szczególności $\mathcal{F}_0$ mierzalna. Wprowadzamy teraz zmienne losowe $T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$ dla $n \in \{1, ..., N\}$, wtedy $T_n \in \{1 + a, 1+b\}$ czyli N - wymiarowa zmienna $T = (T_1, ..., T_N)$ wyznacza jednoznacznie element Ω, dla $\omega = (\omega_1, ...\omega_N) \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(T_1 = \omega_1, ..., T_N = \omega_N)$. Więc znajomość rozkładu T jest równoważna znajomości $\mathbb{P}$. Wnioskujemy stąd też, że $\sigma(S_1, ..., S_n) = \sigma(T_1, ...T_n)$.

4.1 Wykonalność i zupełność

Chcemy przeprowadzić rozumowanie dla rynku wolnego od arbitrażu. Szukamy warunków, jakie muszą spełniać a i b oraz jaki rozkład mają zmienne T_i.

Z twierdzenia 3.9. istnieje miara $\mathbb{P}^*$ względem której zdyskontowane ceny $(\tilde{S}_n)$ są martyngałem. $\tilde{S}_n \in \mathcal{F}_n$ więc:

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n \Leftrightarrow 1 = \mathbb{E}^*[\frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^*[\frac{S_{n+1}/(1+r)^{n+1}}{S_n/(1+r)^n}|\mathcal{F}_n] = \frac{\mathbb{E}^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n]}{1+r},$$

Z tego wynika:

Twierdzenie 4.1. *$(\tilde{S}_n)$ jest $\mathbb{P}^*$ martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1+r$*

Wniosek 4.2. *Równoważnie mamy $\mathbb{E}^*[T_{n+1}] = 1+r$, ponieważ przy wykonalnym rynku wahania ceny są niezależne od tego jak wahała się w poprzednich krokach. T_{n+1} jest równe $1+a$ lub $1+b$ z niezerowym prawdopodobieństwem, stąd z definicji wartości oczekiwanej* *otrzymujemy warunek $1 + r \in (1 + a, 1 + b)$. Więc aby nie było możliwości arbitrażu potrzeba $r \in (a, b)$.*

Intuicyjnie wynika to z tego, że jeżeli cena ryzykownego instrumentu ma dwie możliwości zmiany, to chcemy żeby jedną z nich był wzrost a drugą spadek. Gdyby $b > a \geqslant r$ to posiadając akcję zarobilibyśmy na pewno więcej niż inwestując w bezpieczną obligację, powiązaną z tym możliwość arbitrażu obrazuje poniższy przykład:

Przykład 4.3. *Załóżmy, że $r \leqslant a$. W czasie 0 możemy pożyczyć bezpieczny instrument w ilości S_0, żeby móc kupić ryzykowny instrument za S_0. Początkowa wartość wynosi więc 0, nie wkładamy żadnego swojego kapitału. Następnie w czasie N zwracamy pożyczkę i sprzedajemy ryzykowny instrument. Nasz zysk wynosi $S_N - S_0(1 + r)^N \geqslant 0$, bo $r \leqslant a$ mamy więc: $S_0(1 + r)^N \leqslant S_0(1 + a)^N \leqslant S_N$. Wskazaliśmy strategię arbitrażową, więc rynek nie jest wykonalny. Analogicznie gdy $r \geqslant b$, w chwili 0 sprzedajemy ryzykowny instrument i inwestujemy pieniądze w bezpieczny.*

Następne twierdzenie wyznacza rozkład zmiennych losowych T_i.

Twierdzenie 4.4. *$(\tilde{S}_n)$ jest martyngałem względem miary $\mathbb{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe $T_1, ...T_N$ są niezależne o takim samym rozkładzie, takim że dla każdego $n \in \{1, .., N\}$: $\mathbb{P}(T_n = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_n = 1 + b)$, gdzie $p = \frac{b-r}{b-a}$.*

Dowód. Gdy T_i są niezależne, o danym rozkładzie, to mamy:

$$\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[T_{n+1}] = p(1 + a) + (1 - p)(1 + b) = 1 - p(b - a) + b = 1 + r,$$

bo $p(b - a) = b - r$. Z twierdzenia 4.1 $(\tilde{S}_n)$ jest $\mathbb{P}$-martyngałem.

W drugą stronę, gdy $(\tilde{S}_n)$ jest $\mathbb{P}$-martyngałem, mamy $\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$. Wiemy, że T_i przyjmują dwie wartości, możemy więc napisać:

$$\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (1 + a)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] + (1 + b)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1 + r,$$

wiemy też że:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}[T_{n+1} = 1 + a|\mathcal{F}_n] + \mathbb{P}[T_{n+1} = 1 + b|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

Podstawiając to do powyższego, otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n](1 + a - 1 - b) = 1 + r - 1 - b,$$

a stąd już $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] = p$ i $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1 - p$.

Teraz pokażemy indukcyjnie, że $\mathbb{P}[T_1 = x_1, ..., T_n = x_n] = \prod_{i=1}^{n} p_i$, dla $x_i \in \{1 + a, 1 + b\}$ oraz $p_i = p$ dla $x_i = 1 + a$, $p_i = 1 - p$ dla $x_i = 1 + b$.

Dla $i = 1$:

$$\mathbb{P}[T_1 = x_1] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_1 = x_1\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_1=x_1\}}|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_1=x_1\}}|\mathcal{F}_0] = p_1.$$

Załóżmy $\mathbb{P}[T_1 = x_1, ..., T_n = x_n] = \prod_{i=1}^n p_i$, wtedy korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe oraz faktu, że $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, ..., S_n) = \sigma(T_1, ..., T_n)$:

$$\mathbb{P}[T_1 = x_1, ..., T_n = x_n, T_{n+1} = x_{n+1}] = \mathbb{P}[T_{n+1} = x_{n+1}|T_1 = x_1, ..., T_n = x_n]\mathbb{P}[T_1 = x_1, ..., T_n = x_n]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=x_{n+1}\}}|\mathcal{F}_n] \prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i=1}^{n+1} p_i.$$

Otrzymaliśmy więc niezależność T_i oraz postulowany rozkład. □

Wniosek 4.5. *Pokazaliśmy, że z tego, że $(\tilde{S}_n)$ jest $\mathbb{P}$ martyngałem jednoznacznie dostajemy rozkład $(T_1, ..., T_N)$, a więc także $\mathbb{P}$. Z twierdzenia 3.13. rynek jest wykonalny i zupełny.*

4.2 Parytet *put/call*

W następnej kolejności chcemy wyznaczyć zależność między wartością opcji sprzedaży i kupna dla opcji europejskiej, czyli tzw. *put/call parity equation*, mając dane cenę wykonania K oraz termin N. Ułatwi to wyznaczenie ceny jednej z opcji, gdy wyliczymy drugą z nich.

W poprzednim rozdziale powiedzieliśmy, że zysk z opcji kupna w chwili N to: $C_N = (S_N - K)_+$ oraz zysk z opcji sprzedaży: $P_N = (K - S_N)_+$. Te zmienne losowe zależne od zmiennej S_N opisują wartość tych opcji w chwili N, są więc $\mathcal{F}_N$ mierzalne oraz nieujemne. C_N i P_N są więc osiągalnymi roszczeniami warunkowymi (z zupełności rynku - poprzedni wniosek), czyli istnieją strategie ϕ^c oraz ϕ^p, które są warte odpowiednio C_N oraz P_N w czasie N. Mamy więc $C_N = V_N(\phi^c)$ oraz $P_N = V_N(\phi^p)$.

Oznaczamy jako $C_n = V_n(\phi^c)$ oraz $P_n = V_n(\phi^p)$, czyli wartość opcji kupna i sprzedaży w chwili n. Z twierdzenia 2.4 ciąg $(\tilde{V}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ jest martyngałem. Otrzymujemy więc, że ciągi zdyskontowanych wartości opcji kupna $(\tilde{C}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ i opcji sprzedaży $(\tilde{P}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ są martyngałami. Stąd:

$$\tilde{C}_n = C_n(1+r)^{-n} = \mathbb{E}[C_N(1+r)^{-N}|\mathcal{F}_n] \tag{4.1}$$

i analogicznie

$$\tilde{P}_n = P_n(1+r)^{-n} = \mathbb{E}[P_N(1+r)^{-N}|\mathcal{F}_n] \tag{4.2}$$

Otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
C_n - P_n &= (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[(S_N-K)_+ - (K-S_N)_+|\mathcal{F}_n] \\
&= (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[S_N - K|\mathcal{F}_n] \\
&= (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[\frac{S_N}{(1+r)^N}(1+r)^N|\mathcal{F}_n] - K(1+r)^{n-N} \\
&= (1+r)^{n}\mathbb{E}[\tilde{S}_N|\mathcal{F}_n] - K(1+r)^{n-N} \\
&= (1+r)^{n}\tilde{S}_n - K(1+r)^{n-N} = S_n - K(1+r)^{n-N}
\end{aligned}
$$

4.3 Cena opcji typu europejskiego w modelu CRR

Teraz wyznaczymy wartość $C_n = c(n, S_n)$, znając K, a, b, r oraz p. W tym celu potrzebujemy jeszcze pokazać następujący lemat, dotyczący warunkowej wartości oczekiwanej.

Lemat 4.6. *Niech X i Y będą mierzalnymi zmiennymi losowymi o wartościach rzeczywistych. Rozważmy σ-ciało $\mathcal{B}$, takie że X jest $\mathcal{B}$-mierzalne, a Y niezależne od $\mathcal{B}$. Dla dowolnej nieujemnej lub ograniczonej funkcji borelowskiej Φ z wartościami w $\mathbb{R}^2$, definiujemy funkcję φ następująco:*

$$\varphi(x) = \mathbb{E}[\Phi(x, Y)], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wtedy φ jest funkcją borelowską na $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{E}[\Phi(X, Y)|\mathcal{B}] = \varphi(X)$ p.w.

Dowód. Oznaczmy jako μ_Y rozkład zmiennej Y. Możemy zauważyć, że z definicji φ oraz z definicji wartości oczekiwanej:

$$\varphi(x) = \mathbb{E}[\Phi(x, Y)] = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, y)\mu_Y(dy).$$

Żeby pokazać równość, skorzystamy z definicji warunkowej wartości oczekiwanej, musimy więc pokazać dwa warunki:

1. $\varphi(X)$ jest zmienną $\mathcal{B}$ mierzalną,
2. $\forall B \in \mathcal{B} \quad \int_B \varphi(X) d\mathbb{P} = \int_B \Phi(X, Y) d\mathbb{P}$.

Warunek 1. wynika z tego, że $\varphi(X)$ jest borelowską funkcją zmiennej $\mathcal{B}$ mierzalnej. Dla pokazania 2. weźmy dowolny zbiór $B \in \mathcal{B}$. Oznaczmy jako $\mu_{X,B}$ rozkład łączny $(X, \mathbb{1}_B)$ oraz jako $\mu_{X,B,Y}$ rozkład łączny $(X, \mathbb{1}_B, Y)$. Jako że Y jest niezależne od $\mathcal{B}$, to jest niezależne od X ($\mathcal{B}$ mierzalne) oraz od $\mathbb{1}_B$. Więc rozkład łączny jest miarą produktową: $\mu_{X,B,Y} = \mu_{X,B} \otimes \mu_Y$. Korzystając z twierdzenia Fubiniego oraz obserwacji z początku

15:71195

dowodu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_B \Phi(X,Y)d\mathbb{P} &= \mathbb{E}[\Phi(X,Y)\mathbb{1}_B] = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)\mathbb{1}_B(z)\mu_{X,B,Y}(dx,dz,dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(z)\Phi(x,y)\mu_{X,B}(dx,dz)\mu_Y(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(z)\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,y)\mu_Y(dy)\mu_{X,B}(dx,dz)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B\varphi(x)\mu_{X,B}(dx,dz) = \mathbb{E}[1_B\varphi(X)]\\ &= \int_B \varphi(X)d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

□

Lemat mówi o tym, że gdy liczymy wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[\Phi(X,Y)|\mathcal{B}]$, gdzie X jest $\mathcal{B}$ mierzalne, a Y niezależne od $\mathcal{B}$, to możemy traktować zmienną X jakby była stałą.

Wracamy do wyznaczenia wartości opcji *call* w chwili n. Podstawiając do (4.1) $S_N = S_n\prod_{i=n+1}^N T_i$ dostajemy

$$\begin{aligned}C_n &= (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[C_N|\mathcal{F}_n] = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[(S_N-K)_+|\mathcal{F}_n]\\ &= (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[(S_n\prod_{i=n+1}^{N}T_i-K)_+|\mathcal{F}_n].\end{aligned}$$

Teraz skorzystamy z lematu. Zmienna $\prod_{i=n+1}^N T_i = Y$ jest niezależna od $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}$, a $S_n = X$ jest $\mathcal{F}_n$ mierzalne, $\Phi(X,Y) = (XY-K)_+$, więc:

$$C_n = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[\Phi(X,Y)|\mathcal{B}] = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}[(S_n\prod_{i=n+1}^{N}T_i-K)_+] = c(n,S_n)$$

W wyznaczonym wzorze traktujemy S_n jak stałą, wartość oczekiwana możemy policzyć z definicji. T_i są *iid* o rozkładzie dwupunktowym, więc ich iloczyn będzie miał wartość $(1+a)^j(1+b)^{N-n-j}$ z prawdopodobieństwem $p^j(1-p)^{N-n-j}$ dla każdego $j\in\{0,...,N-n\}$. Stąd:

$$c(n,S_n) = (1+r)^{n-N}\sum_{j=0}^{N-n}\binom{N-n}{j}p^j(1-p)^{N-n-j}(S_n(1+a)^j(1+b)^{N-n-j}-K)_+.$$

Powyższy wzór pozwala wyznaczyć wartość opcji *call* w chwili n, znając aktualną wartość aktywa. Możemy więc zapisać wartość opcji call typu europejskiego w chwili 0 - czyli cenę teoretyczną:

$$\begin{aligned}C_0 &= (1+r)^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}(S_0(1+a)^j(1+b)^{N-j}-K)_+\\ &= S_0\sum_{j=0}^{d}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}\frac{(1+a)^j(1+b)^{N-j}}{(1+r)^N} - K(1+r)^{-N}\sum_{j=0}^{d}\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}\end{aligned}$$

dla największego $d \in \mathbb{N}$, takiego że $S_0(1+a)^d(1+b)^{N-d} > K$. Oznaczając $p' = p\frac{1+a}{1+r}$, dostajemy $1-p' = (1-p)\frac{1+b}{1+r}$, więc dalej:

$$C_0 = S_0 \sum_{j=0}^{d} \binom{N}{j} p'^j (1-p')^{N-j} - K(1+r)^{-N} \sum_{j=0}^{d} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j} \tag{4.3}$$

$$= S_0 \mathbb{P}[B(N,p') \leqslant d] - K(1+r)^{-N} \mathbb{P}[B(N,p) \leqslant d] \tag{4.4}$$

gdzie $B(N,p)$ oznacza zmienną o rozkładzie dwumianowym z parametrami N, p. Korzystając z parytetu *put/call* wyznaczamy cenę teoretyczną opcji *put*:

$$P_0 = C_0 - S_0 + K(1+r)^{-N} = -S_0 \mathbb{P}[B(N,p') > d] + K(1+r)^{-N} \mathbb{P}[B(N,p) > d] \tag{4.5}$$

Powyżej wyznaczyliśmy wzory w dwumianowym modelu wyceny opcji (*CRR pricing formula*).

4.4 Hedging opcji europejskich

Powyższa cena jest wolna od arbitrażu, kiedy wystawca otrzymuje tą kwotę sprzedając opcję może podążać strategią ϕ^c generującą C_N, czyli wypłatę z opcji. Konstrukcja portfela według tej strategii pozwoli wystawcy opcji pozostać zabezpieczonym przed wahaniami cen. Niech ϕ_n^0 oznacza ilość instrumentu pozbawionego ryzyka w portfelu w chwili n, chcemy wyznaczyć ϕ_n^c - ilość ryzykownego instrumentu w chwili n. Mamy:

$$V_n(\phi_c) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^c S_n = C_n = c(n, S_n). \tag{4.6}$$

ϕ_n^0 oraz ϕ_n^c są $\mathcal{F}_{n-1}$ mierzalne. Jako, że $S_n = S_{n-1}(1+a)$ lub $S_n = S_{n-1}(1+b)$ możemy zapisać dwie równości podstawiając do (4.3):

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^c S_{n-1}(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a)),$$

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^c S_{n-1}(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b)).$$

Odejmując je stronami możemy wyznaczyć:

$$\phi_n^c = \Delta(n, S_{n-1}) = \frac{c(n, S_{n-1}(1+b)) - c(n, S_{n-1}(1+a))}{S_{n-1}(b-a)}.$$

Jest to ilość ryzykownego instrumentu, którą powinien mieć w portfelu w chwili n wystawca opcji, który chce być wypłacalny gdy opcja spadnie oraz gdy urośnie, tyle więc musi zakupić w chwili $n-1$.

Możemy zapisać to w czytelniejszej postaci:

$$\Delta(n, S_{n-1}) = \frac{C_n^b - C_n^a}{S_n^b - S_n^a}, \tag{4.7}$$

gdzie C_n^b, S_n^b oznaczają wartość opcji i cenę instrumentu bazowego w momencie n, jeżeli w ostatnim kroku cena instrumentu zmieni się o 1+b (wzrośnie). Analogicznie C_n^a, S_n^a.

Korzystając z tego, że strategia ma być samofinansująca możemy wyznaczyć ilość bezpiecznego instrumentu używając twierdzenia 3.4:

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i^c \Delta\tilde{S}_i - \phi_n^c \tilde{S}_{n-1} = \tilde{V}_{n-1} - \phi_n^c \tilde{S}_{n-1}.$$

Rozważaliśmy tutaj opcję kupna z ceną C_n, jednak dla opcji sprzedaży zachodzą te same własności. Więc ogólnie strategia zabezpieczająca zakłada, że w chwili $n-1$ posiadamy portfel składający się z:

- $\phi_n = \frac{V_n^b - V_n^a}{S_n^b - S_n^a}$ aktywa bazowego,
- $\phi_n^0 = \tilde{V}_{n-1} - \phi_n \tilde{S}_{n-1}$ bezpiecznego aktywa,

gdzie $\tilde{V}_{n-1}$ jest wartością zdyskontowaną opcji w chwili $n-1$, V_n^a, V_n^b - wartościami opcji gdy cena aktywa bazowego w kolejnym kroku spadnie/zmaleje. Wraz ze wzrostem cen aktywa bazowego wartość opcji kupna rośnie, a opcji sprzedaży maleje. Możemy więc wywnioskować, że $\phi_n^c > 0$ oraz $\phi_n^p < 0$.

4.5 Przypadek graniczny - ceny Blacka-Scholesa

Do tej pory wszystko odbywało się na skończonej przestrzeni, czas od 0 do T dzieliliśmy na N 'kawałków', wartości opcji zmieniały się w tych N momentach. Teraz chcemy przejść z N do nieskończoności, żeby otrzymać ceny w modelu ciągłym. Musimy w tym celu wprowadzić pewne zmiany w oznaczeniach.

Gdy rozważaliśmy model dla konkretnej liczby okresów, r oznaczało stopę w jednym okresie, jednak jeżeli okresy są coraz krótsze to stopa ta będzie się zmniejszać (również dążyć do 0). Oznaczmy r_N stopę w jednym okresie przy podziale odcina $[0, T]$ na N okresów. W ciągłym modelu potrzebujemy ciągłej stopy procentowej, czyli intensywności oprocentowania R. Dobieramy ją tak, żeby była stopą 'graniczną', czyli żeby spełniała: $e^{RT} = \lim_{N\to\infty}(1+r_N)^N$ stąd $r_N = \frac{RT}{N}$.

Zmiana ceny w jednym okresie następowała na dwa sposoby, tzn. zmienne T_i miały wartości $\{1+a, 1+b\}$, które oznaczały dwa możliwe warianty zmiany cen w jednym okresie. Planujemy skracać okresy, więc musimy też zmniejszać wahania cen. Oznaczamy więc $\{1+a_N, 1+b_N\}$ wartości zmiennych T_i przy N okresach. Gdy długość okresu dąży do 0, to samo dzieje się z wartościami a_N, b_N.

Chcemy wprowadzić parametr σ, od którego zależą te wahania cen w okresie $[0, T]$. Jest to tzw. zmienność (*volatility*) ceny aktywa w czasie T (używa się także $\sigma = \tilde{\sigma}\sqrt{T}$, gdy znamy zmienność w jednostce czasu). Jest to parametr, którego nie możemy bezpośrednio zaobserwować. Można go estymować statystycznymi metodami na podstawie historycznych zmian ceny aktywa lub wyznaczyć go znając rynkową cenę opcji i korzystając z formuły na tą cenę (w praktyce często właśnie do tego używa się wyznaczanych przez nas wzorów). W zależności od σ wyznaczamy a_N, b_N tak żeby spełniały:

$$\log\frac{1+a_N}{1+r_N} = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \log\frac{1+b_N}{1+r_N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{4.8}$$

Cały czas żądamy wykonalności i zupełności rynku, więc dla każdego N zachodzą warunki opisane w sekcji 4.1. Korzystając z tej wiedzy i z rachunku prawdopodobieństwa wyznaczymy ceny graniczne, które okazują się być takie same jak wyznaczone metodą Blacka-Scholesa.

Lemat 4.7. *Niech $(Y_N)_{N\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że*

$$Y_N = X_1^N + ... + X_N^N,$$

gdzie dla każdego N zmienne X_i^N są iid, przyjmują wartości $\{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$ oraz $\mathbb{E}[X_i^N] = \mu_N$. $\lim_{N\to\infty} N\mu_N = \mu$. Wtedy ciąg (Y_N) zbiega według rozkładu do $N(\mu, \sigma^2)$.

Dowód. Na mocy twierdzenia Lévy-Craméra wystarczy, że pokażemy zbieżność funkcji charakterystycznych ϕ_{Y_N} zmiennych Y_N do funkcji charakterystycznej rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$. Korzystamy z niezależności i własności rozkładu X_i^N oraz rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg Taylora.

$$\begin{aligned}
\phi_{Y_N}(t) &= \mathbb{E}[\exp(itY_N)] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{N}\exp(itX_j^N)\right] = \prod_{j=1}^{N}\mathbb{E}[\exp(itX_j^N)] = (\mathbb{E}[\exp(itX_1^N)])^N \\
&= \left(\mathbb{P}\left[X_1^N = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]\exp\left(it(-\frac{\sigma}{\sqrt{N}})\right) + \mathbb{P}\left[X_1^N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]\exp\left(it\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right)^N \\
&= \left(\mathbb{P}\left[X_1^N = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]\left(1 - it\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{(it\frac{-\sigma}{\sqrt{N}})^2}{2} + o\big(\frac{1}{N}\big)\right)\right. \\
&\quad \left. + \mathbb{P}\left[X_1^N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]\left(1 + it\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{(it\frac{\sigma}{\sqrt{N}})^2}{2} + o\big(\frac{1}{N}\big)\right)\right)^N \\
&= \left(1 + it\mu_N - \frac{t^2\sigma^2}{2N} + o\big(\frac{1}{N}\big)\right)^N
\end{aligned}$$

Możemy więc policzyć granicę

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\phi_{Y_N}(t) &= \lim_{N\to\infty}\left(1 + it\mu_N - \frac{t^2\sigma^2}{2N} + o\big(\frac{1}{N}\big)\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{it\mu_N N - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(\frac{1}{N})N}{N}\right)^N \\
&= \exp\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right) = \phi_{N(\mu,\sigma^2)}(t).
\end{aligned}$$

Więc $(Y_N) \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$ $\square$

Najpierw znajdziemy cenę opcji sprzedaży korzystając z (4.2) dla ustalonego N:

$$P_0^N = \left(1 + \frac{RT}{N}\right)^{-N} \mathbb{E}[(K - S_N)_+ | \mathcal{F}_0] = \left(1 + \frac{RT}{N}\right)^{-N} \mathbb{E}\left[\left(K - S_0 \prod_{i=1}^{N} T_i\right)_+\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(\left(1 + \frac{RT}{N}\right)^{-N} K - S_0 \exp(Y_N)\right)_+\right]$$

gdzie

$$\exp(Y_N) = (1+r_N)^{-N} \prod_{i=1}^{N} T_i = \prod_{i=1}^{N} \frac{T_i}{1+r_N} = \prod_{i=1}^{N} \exp\left(\log \frac{T_i}{1+r_N}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \log \frac{T_i}{1+r_N}\right),$$

stąd mamy

$$Y_N = \sum_{i=1}^{N} \log \frac{T_i}{1+r_N}.$$

Niech $X_i^N = \log \frac{T_i}{1+r_N}$, są one *iid* o wartościach w $\{\log \frac{1+a_N}{1+r_N}, \log \frac{1+b_N}{1+r_N}\}$, ponieważ T_i są *iid* o rozkładzie jak w Twierdzeniu 4.4. Wiemy, że $\log \frac{1+a_N}{1+r_N} = \frac{-\sigma}{\sqrt{N}}$ oraz $\log \frac{1+b_N}{1+r_N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, więc X_i^N ma wartości w $\{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\}$, a stąd:

$$\mathbb{E}[X_i^N] = p\frac{-\sigma}{\sqrt{N}} + (1-p)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = (1-2p)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2 - \exp\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \exp\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}{\exp\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \exp\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} =: \mu_N.$$

Ponadto korzystając znów z rozwinięcia liczby e w szereg:

$$\lim_{N\to\infty} N\mu_N = \lim_{N\to\infty} \frac{2 - \exp\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \exp\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}{\exp\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \exp\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}N$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2 - \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N} + o(N^{-3/2})\right) - \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N} - o(N^{-3/2})\right)}{\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N} + o(N^{-3/2})\right) - \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N} - o(N^{-3/2})\right)}\sigma\sqrt{N}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sigma\sqrt{N}\frac{\left(-\frac{\sigma^2}{N} - o(N^{-2})\right)}{\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{N}} + o(N^{-3/2})\right)} = \lim_{N\to\infty} \sigma\sqrt{N}\frac{\frac{1}{N}\left(-\sigma^2 - o(N^{-1})\right)}{\frac{1}{\sqrt{N}}\left(2\sigma + o(N^{-1/2})\right)}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sigma\frac{(-\sigma^2 - o(N^{-1}))}{(2\sigma + o(N^{-1/2}))} = \frac{-\sigma^3}{2\sigma} = -\frac{\sigma^2}{2}$$

więc ciąg (Y_N) spełnia założenia lematu 4.7. stąd $(Y_N) \xrightarrow{d} N(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$. Niech $\psi(y) = (K\exp(-RT) - S_0\exp(y))_+$, wtedy:

$$|P_0^N - \mathbb{E}(\psi(Y_N))| = \left|\mathbb{E}\left[\left(\left(1 + \frac{RT}{N}\right)^{-N} K - S_0 \exp(Y_N)\right)_+ - \left(K\exp(-RT) - S_0\exp(Y_N)\right)_+\right]\right|$$

20:30497

$$\leqslant K\left|\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N}-\exp(-RT)\right|.$$

Dzięki temu, że analizujemy opcję *put* funkcja ψ jest ograniczoną ciągłą funkcją, (Y_N) jest zbieżne według rozkładu, możemy więc napisać:

$$\lim_{N\to\infty} P_0^N = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[\psi(Y_N)] = \mathbb{E}\lim_{N\to\infty}\psi(Y_N) = \mathbb{E}\psi(Y)$$

gdy $Y' \sim N(0,1)$, możemy napisać $Y = \sigma Y' - \frac{\sigma^2}{2}$, stąd:

$$\lim_{N\to\infty} P_0^N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(Ke^{-RT} - S_0 e^{\sigma y - \frac{\sigma^2}{2}})_+ e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

wyrażenie podcałkowe jest różne od 0 gdy $Ke^{-RT} - S_0 e^{\sigma y - \frac{\sigma^2}{2}} > 0$, dostajemy stąd $y < \frac{\log K - log S_0 - RT + \sigma^2/2}{\sigma} = d_1$, więc dalej mamy:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P_0^N &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1}\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{\sigma y - \frac{\sigma^2}{2}}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-RT}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}}dy - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{\sigma y - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{y^2}{2}}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-RT}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}}dy - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2}}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-RT}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}}dy - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1-\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= Ke^{-RT}F(d_1) - S_0F(d_1-\sigma) = P_0
\end{aligned}\tag{4.9}$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$. Otrzymaliśmy więc jawny wzór na wartość opcji sprzedaży w chwili 0. Teraz korzystając z 'put/call parity equation' możemy łatwo wyznaczyć wartość opcji sprzedaży:

$$\lim_{N\to\infty} C_0^N = S_0F(-d_1+\sigma) - Ke^{-RT}F(-d_1) = C_0. \tag{4.10}$$

4.6 Przykład

Chcemy teraz wykorzystać uzyskane do tej pory rezultaty, żeby wycenić roczną opcję i przedstawić dla niej strategię zabezpieczającą. Rozważmy model 4-okresowy ($N = 4$), czyli zmiana cen następuje co 3 miesiące, w którym mamy dostępną akcję o wartości $S_0 = 100$, znamy także jej zmienność w ciągu roku $\sigma = 0.2$. Załóżmy, że akcja nie wypłaca dywidend oraz istnieje możliwość inwestycji ze stopą wolną od ryzyka $r = 5\%$ w jednym okresie (raczej nie spotykaną w praktyce). Chcemy wycenić opcje europejskie typu *call* i *put* z ceną wykonania $K = 110$ używając czterookresowego modelu CRR.

Wyznaczamy parametry a, b korzystając z (4.8):

$$1 + a = \exp(-\frac{\sigma}{2})(1 + r) = \exp(-0.2/2) \cdot 1.05 \approx 0.95,$$

$$1 + b = \exp(\frac{\sigma}{2})(1 + r) = \exp(0.1) \cdot 1.05 \approx 1.16,$$

oraz z twierdzenia 4.4 miarę probabilistyczną, względem której zdyskontowane ceny akcji są martyngałami:

$$\mathbb{P}(S_{n+1}/S_n = 1 + a) = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1}/S_n = 1 + b) = p = \frac{b - r}{b - a} \approx 0.52.$$

Tak więc ze wzorów wyznaczonych w paragrafie 4.3:

$$\begin{aligned}
C_0 = (1 + r)^4\mathbb{E}[(S_4 - K)_+] &= (1 + r)^{-4}\sum_{j=0}^{4} p^j(1 - p)^{4-j}(S_0(1 + a)^j(1 + b)^{4-j} - K)_+ \\
&= 1.05^{-4}((1 - p)^4(100(1 + b)^4 - 110) + 4(1 - p)^3p(100(1 + b)^3(1 + a) - 110) \\
&+ 6(1 - p)^2p^2(100(1 + b)^2(1 + a)^2 - 110)) = 13.656,
\end{aligned}$$

możemy też policzyć ze wzoru (4.4), tutaj $d = 2, p' \approx 0.475$:

$$C_0 = 100 \cdot \mathbb{P}[B(4, p') \leqslant 2] - 110 \cdot (1.05)^{-4} \cdot \mathbb{P}[B(4, p) \leqslant 2] = 13.656,$$

i wyliczamy cenę *put* korzystając z (4.5):

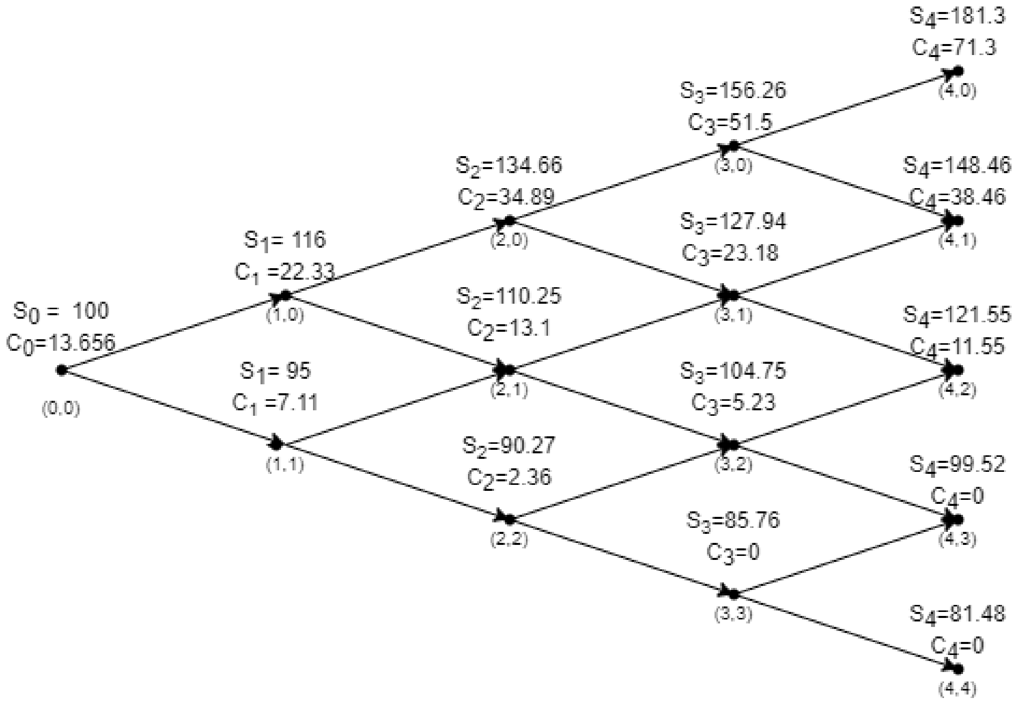
$$P_0 = 13.656 - 100 + 110 \cdot 1.05^{-4} = 4.153277.$$

Teraz wyliczymy ceny ze wzorów Blacka Scholesa (4.9) i (4.10), żeby porównać wyniki. $R = \frac{rN}{T} = 0.2$, $d_1 \approx -0.42$

$$\begin{aligned}
C_0^{BS} &= 100 \cdot F(-d_1 + 0.2) - 110 \cdot e^{-0.2} \cdot F(-d_1) = 13.54898 \\
P_0^{BS} &= 110 \cdot e^{-0.2} \cdot F(d_1) - 100 \cdot F(d_1 - 0.2) = 3.609359.
\end{aligned}$$

Widzimy, że w tym przypadku cena opcji kupna wyznaczona metodą dwumianową jest dokładniejsza niż opcji sprzedaży.

W powyższy sposób bardzo szybko można wyznaczyć ceny opcji w chwili 0. Jednak dla kogoś, kto wystawia opcję istotna jest także wiedza co dzieje się z wartością opcji w czasie jej trwania. Możemy przedstawić ewolucję cen opcji kupna na następującym diagramie:



Na początku uzupełniamy wartości S_n - czyli ceny akcji w każdym wierzchołku. W $(0,0)$ wpisujemy obecną cenę akcji $S_0 = 100$, w kolejnych $S_n = S_{n-1}(1+a)$ jeżeli poszliśmy w dół, $S_n = S_{n-1}(1+b)$ jeżeli w górę. Więc np. w $(1,0)$ wpiszemy $S_1 \approx 100 \cdot 1.16 = 116$, w $(1,1), S_1 \approx 100 \cdot 0.95 = 95$.

Następnie uzupełniamy wartości opcji C_n w danym wierzchołku. Ponieważ wiemy, że $C_N = (S_N - K)_+$ możemy od razu uzupełnić ostatnią kolumnę. Następnie korzystając z:

$$\begin{aligned}
C_{n-1} &= c(n-1, S_{n-1}) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}[C_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= (1+r)^{-1}\Big(p \cdot (S_{n-1}(1+a) - K)_+ + (1-p)(S_{n-1}(1+b) - K)_+\Big) \\
&= (1+r)^{-1}(p \cdot C_n^a + (1-p) \cdot C_n^b)
\end{aligned}$$

uzupełniamy kolejne ceny korzystając z tego wzoru. Tak więc na przykład w wierzchołku $(3,3) : C_3 = 1.05^{-1} \cdot (p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0) = 0$, a w $(3,0) : C_3 = 1.05^{-1} \cdot (p \cdot 38.46 + (1-p) \cdot 71.3) = 51.5$ i tak dochodzimy znowu do $C_0 = 13.656$.

Ten diagram pozwala śledzić zmianę cen akcji i zmianę wartości opcji, ponadto korzystając ze wzoru (4.7), możemy wyliczyć jaki skład powinien mieć portfel zabezpieczający.

Zgodnie z tym na początku gdy sprzedamy opcje powinniśmy mieć $\phi_1 = \Delta(0,100) = \frac{22.33-7.11}{116-95} = 0.72$ akcji oraz $\phi_1^0 = C_0 - \phi_1 \cdot S_0 = 13.656 - 0.72 \cdot 100 = -58.72$ gotówki.

W praktyce oznacza to, że gdy sprzedamy opcję, powinniśmy pożyczyć 58.72 bezpiecznego aktywa (np. pożyczka w banku), a za pożyczone pieniądze i zarobek z opcji kupić 0.72 akcji.

5 Opcje amerykańskie

Opcje europejskie wyceniane w poprzednim rozdziale to pochodne instrumenty finansowe dające prawo do zakupu lub sprzedaży podstawowego instrumentu jedynie w momencie wygaśnięcia opcji. Z kolei posiadacz opcji amerykańskiej może ją wykonać w dowolnym momencie przed wygaśnięciem. Naturalnie możemy się spodziewać, że opcja amerykańska będzie droższa niż europejska, ponieważ uprawnia nas zarówno do tego co europejska jak i do wcześniejszego wykonania.

Wracając do poprzednich konwencji zakładamy, że wahania cen oraz możliwość sprzedaży ma miejsce w chwilach $0 \leqslant n \leqslant N$. Zdefiniujmy nieujemną zmienną losową (Z_n), adoptowaną do $(\mathcal{F}_n)$, która jest zyskiem spowodowanym przez wykonanie opcji amerykańskiej na instrument S^1, z ceną wykonania K w momencie n. Wtedy $Z_n = (S_n^1 - K)_+$ dla opcji kupna, $Z_n = (K - S_n^1)_+$ dla opcji sprzedaży.

Chcemy określić wartość opcji powiązanej z (Z_n), będziemy ją oznaczać U_n. Wiemy, że w czasie N mamy $U_N = Z_N$, ponieważ jest to ostatni moment na wykonanie opcji. Zastanówmy się jaka powinna być wartość U_{N-1}. Są wtedy dwie możliwości: albo posiadacz opcji wykona ją od razu i zarobi Z_{N-1} albo poczeka do momentu N i zarobi Z_N. Więc w czasie $N-1$ wystawca musi posiadać wystarczającą ilość pieniędzy, żeby być w stanie wypłacić zysk posiadaczowi opcji w obu przypadkach.

Jeżeli kupujący opcję wykona ją od razu w chwili $N-1$, wystawca potrzebuje posiadać wielkość zysku: Z_{N-1}. Jeżeli poczeka do chwili N wystawca w chwili $N-1$ musi posiadać środki potrzebne do wygenerowania zysku, który będzie musiał wypłacić w chwili N, czyli Z_N. Rynek jest zupełny, więc istnieje strategia, która wygeneruje wartość Z_N. Jej wartość w chwili $N-1$ to $\mathbb{E}[Z_N \frac{S_{N-1}^0}{S_N^0} | \mathcal{F}_{N-1}] = S_{N-1}^0 \mathbb{E}[\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1}]$.

Stąd kwota potrzebna wystawcy opcji to maksimum z tych wartości:

$$U_{N-1} = max(Z_{N-1}, S_{N-1}^0 \mathbb{E}[\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1}]).$$

Możemy myśleć w ten sposób o cenie opcji amerykańskiej w każdym momencie $0 \leqslant n \leqslant N$. To znaczy jako o maksimum z dwóch wielkości:

- Z_n - wypłata z wykonania opcji w momencie n, wielkość której potrzebowalibyśmy gdyby właściciel opcji wykonał ją natychmiast,
- $S_n^0 \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ - wartość strategii replikującej cenę opcji w kolejnym momencie, tyle potrzebujemy jeżeli właściciel opcji jej nie wykona.

Z powyższych rozważań otrzymujemy wzór:

$$U_n = max(Z_n, S_n^0 \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n]). \tag{5.1}$$

Możemy założyć, że oprocentowanie jest równe r, wtedy $S_n^0 = (1+r)^n$ oraz $\tilde{U}_n = \frac{U_n}{S_n^0} = (1+r)^{-n}U_n$ jest zdyskontowaną ceną opcji amerykańskiej, wzór (5.1) przyjmuje postać:

$$U_n = max(Z_n, (1+r)^{-1}\mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]).$$

Ciąg zdyskontowanych cen $(\tilde{U}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ jest postaci:

$$\begin{cases} \tilde{U}_N = \tilde{Z}_N \\ \tilde{U}_n = max(\tilde{Z}_n, \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n]). \end{cases}$$

Widzimy więc, że zdyskontowane wartości opcji $(\tilde{U}_n)$ są kopertą Snella zdyskontowanych zysków z wykonania opcji $(\tilde{Z}_n)$.

Z twierdzenia 2.8 wiemy, że $(\tilde{U}_n)$ jest nadmartyngałem, możemy więc zastosować rozkład Doob'a opisany w twierdzeniu 2.7:

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n,$$

gdzie $(\tilde{M}_n)$ jest martyngałem, $(\tilde{A}_n)$ jest niemalejącym przewidywalnym ciągiem, z $A_0 = 0$. Rynek jest zupełny, istnieje więc samofinansująca strategia ϕ warta $V_N(\phi) = S_N^0\tilde{M}_N$, wtedy $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$. Wiemy też, że $(\tilde{V}_n(\phi))_n$ jest martyngałem jako transformata martyngałowa zdyskontowanych cen. Stąd:

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}[\tilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\tilde{M}_N|\mathcal{F}_n] = \tilde{M}_n.$$

Dalej możemy więc napisać:

$$\tilde{U}_n = \tilde{V}_n(\phi) - \tilde{A}_n$$

$$U_n = V_n(\phi) - A_n \leqslant V_n(\phi),$$

gdzie $A_n = S_n^0\tilde{A}_n \geqslant 0$, więc:

$$U_0 = V_0(\phi) - A_0 = V_0(\phi).$$

Widzimy, że stosując strategię ϕ z wartością początkową $V_0(\phi)$ w każdym momencie wartość portfela będzie nie mniejsza niż wartość opcji. Więc w szczególności, w każdym momencie będzie nie mniejsza niż zysk z wykonania opcji. Stąd cena opcji amerykańskiej powinna wynosić:

$$U_0 = V_0(\phi) = \mathbb{E}[\tilde{M}_0],$$

ponieważ wtedy wystawca opcji otrzymując $V_0(\phi)$ może się zabezpieczyć zgodnie ze strategią ϕ.

6 Czas zatrzymania

Kupując opcję typu amerykańskiego jej posiadacz może ją wykonać w dowolnym momencie. To znaczy, że mając proces losowy opisujący zmiany cen instrumentu bazowego może zatrzymać go kiedy chce przez wykonanie. Naturalnie, chciałby wykonać ją w takim momencie by zmaksymalizować swój zysk.

Takie rozumowanie nie pozostaje też obojętne dla ceny opcji. Wystawca opcji musi przecież być zabezpieczony w każdym momencie, a więc zwłaszcza wtedy, gdy posiadacz maksymalizuje zysk.

W tym rozdziale będziemy szukać reguł, które powiedzą nam, kiedy najbardziej opłaca się wykonać opcję oraz ile wtedy możemy dzięki niej zyskać.

Definicja 6.1. *Funkcja* $\nu : \Omega \mapsto \{0, 1, ...N\}$ *jest czasem zatrzymania, jeżeli dla każdego* $n \in \{0, 1, ..., N\}$ *spełnia* $\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$*.*

Uwaga 6.2. *Równoważnie,* ν *jest czasem zatrzymania gdy dla każdego* $n \in \{0, 1, ..., N\}$ *zachodzi* $\{\nu \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$*.*

Niech $\mathcal{T}_{n,N}$ - zbiór czasów zatrzymania o wartościach w zbiorze $\{n, n+1, ..., N\}$.

Definicja 6.3. *Mówimy, że czas zatrzymania* ν *jest optymalny dla ciągu* $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *gdy:*

$$\mathbb{E}[X_\nu|\mathcal{F}_0] = \sup_{\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}[X_\nu|\mathcal{F}_0]$$

Optymalny czas zatrzymania maksymalizuje wartość oczekiwaną zmiennej. Naszym celem jest więc wyznaczenie optymalnych czasów zatrzymania ciągu (Z_n) opisującego zysk z wykonania opcji.

Dla ciągu adoptowanych zmiennych losowych $\{X_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ i dla czasu zatrzymania ν możemy zdefiniować zatrzymany proces następująco:

$$X_n^\nu := X_{\nu\wedge n} = \begin{cases} X_\nu & gdy \quad \nu \leqslant n \\ X_n & gdy \quad \nu > n \end{cases}$$

Twierdzenie 6.4. *Jeżeli ciąg* $\{X_n\}$ *jest martyngałem, (podmartyngałem, nadmartyngałem) oraz* ν *jest czasem zatrzymania to zatrzymany proces* $\{X_{n\wedge\nu}\}$ *jest również martyngałem (podmartyngałem, nadmartynagałem).*

Dowód.

$$X_{n\wedge\nu} = X_0 + \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1}) \mathbb{1}_{\{i\leqslant\nu\}},$$

$\{i \leqslant \nu\} = \{\nu \leqslant i-1\}^c \in \mathcal{F}_{i-1}$, więc $\mathbb{1}_{\{i\leqslant\nu\}}$ jest ciągiem przewidywalnym. Stąd $X_{n\wedge\nu}$ jest transformatą martyngałową, martyngału (X_n) a więc z twierdzenia 2.4. jest martyngałem. Podobnie można pokazać dla pod- i nadmartyngału. □

6.1 Optymalne czasy zatrzymania

Pokazaliśmy już, że ciąg zdyskontowanych wartości opcji amerykańskiej jest kopertą Snella zdyskontowanych zysków z wykonania opcji. Będziemy więc oznaczać przez $(U_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ ciąg będący kopertą Snella ciągu $(Z_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$.

Chcąc znaleźć optymalny czas zatrzymania możemy zauważyć, że dla posiadacza opcji nie opłaca się wykonywać jej kiedy $U_n > Z_n$. Wtedy otrzymałby on jedynie Z_n, w zamian za opcję, która jest warta U_n - czyli więcej. Dlatego przyjrzymy się następującemu czasowi zatrzymania:

$$\nu_0 = \inf\{n \geqslant 0 | U_n = Z_n\}.$$

Twierdzenie 6.5. *ν_0 jest czasem zatrzymania. Ponadto wtedy zatrzymany proces $\{U_{n\wedge\nu_0}\}$ jest martyngałem.*

Dowód. Wiemy, że $U_N = Z_N$, więc na pewno $\nu_0 \in \{0, 1, ..., N\}$. Zdarzenie $\{\nu_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$ ponieważ $U_0, Z_0 \in \mathcal{F}_0$. Dla pozostałych wartości $k \geqslant 1$:

$$\{\nu_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap ... \cap \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_k,$$

więc ν_0 jest czasem zatrzymania.

Teraz chcemy pokazać, że zatrzymany w ten sposób proces jest martyngałem. Możemy go zapisać następująco:

$$U_n^{\nu_0} = U_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\nu_0 \geqslant i\}}(U_i - U_{i-1}).$$

Wtedy dla dowolnego $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$:

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = \mathbb{1}_{\{\nu_0 \geqslant n+1\}}(U_{n+1} - U_n).$$

$U_n = \max(Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n])$, a na zbiorze $\{\nu_0 \geqslant n+1\}$ mamy $U_n \neq Z_n$, więc $U_n = \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]$.

Podstawiając to do powyższego, a następnie warunkując stronami względem $\mathcal{F}_n$ otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{1}_{\{\nu_0 \geqslant n+1\}}\mathbb{E}[(U_{n+1} - \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n])|\mathcal{F}_n] = 0,$$

ponieważ $\{\nu_0 \geqslant n+1\} = \{\nu_0 \leqslant n\}^c \in \mathcal{F}_n$. Powyższa równość dowodzi tezy. □

Wniosek 6.6. *Czas zatrzymania ν_0 jest optymalny oraz:*

$$U_0 = \mathbb{E}[Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = \sup_{\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0].$$

Wykonanie opcji według tej zasady maksymalizuje wartość oczekiwaną zysku. Jest to największy spodziewany na początku życia opcji zysk, więc gdyby cena opcji U_0 była mniejsza istniałaby możliwość arbitrażu.

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia U^{ν_0} jest martyngałem, więc:

$$U_0 = U_0^{\nu_0} = \mathbb{E}[U_N^{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0].$$

Dalej, żeby pokazać optymalność weźmy dowolny czas zatrzymania $\nu \in \mathcal{T}_{0,N}$. Zatrzymany ciąg U^ν jest wtedy nadmartyngałem z twierdzenia 6.4. Zatem:

$$U_0 \geqslant \mathbb{E}[U_N^\nu|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0],$$

a stąd już wiedząc, że dla ν_0 zachodzi równość otrzymujemy tezę.

□

Możemy uogólnić powyższy wniosek i napisać:

$$U_n = \mathbb{E}[Z_{\nu_n}|\mathcal{F}_n] = \sup_{\mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_n],$$

gdzie $\nu_n = \inf\{i \geqslant n : U_i = Z_i\}$. W każdej chwili wartość opcji jest wartością oczekiwaną zysku z wykonania opcji w optymalnym czasie.

ν_0 jest pierwszym momentem, w którym wykonanie się opłaca. Jednak takich momentów może być więcej. Poniższe twierdzenie charakteryzuje wszystkie optymalne czasy zatrzymania.

Twierdzenie 6.7. *Czas zatrzymania ν jest optymalny wtedy i tylko wtedy gdy:*

1. $Z_\nu = U_\nu$

2. $(U_{\nu\wedge n})_{0\leqslant n\leqslant N}$ *jest martyngałem.*

Dowód. Jeżeli U^ν jest martyngałem i $Z_\nu = U_\nu$ to $U_0 = \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0]$, więc z wniosku 6.6. mamy, że ν jest optymalny.

W drugą stronę, gdy ν jest optymalny to:

$$\mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0] \geqslant \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0] = \sup_{\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0] \geqslant \mathbb{E}[Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = U_0 \geqslant \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0],$$

a stąd oraz z $U_\nu \geqslant Z_\nu$ wnioskujemy, że $U_\nu = Z_\nu$.

Z tego, że U^ν jest nadmartyngałem oraz z równości powyżej :

$$U_0 \geqslant \mathbb{E}[U_{\nu\wedge n}|\mathcal{F}_0] \geqslant \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0] = U_0,$$

więc nierówność możemy zastąpić równością:

$$\mathbb{E}[U_{\nu\wedge n}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_0].$$

Ponadto $U_{\nu\wedge n} \geqslant \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_n]$, więc zachodzi równość $U_{\nu\wedge n} = \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_n]$. Dalej:

$$\mathbb{E}[U_{\nu\wedge n}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_{n-1}] = U_{\nu\wedge n-1},$$

więc (U_n^ν) jest martyngałem. □

6.2 Największy optymalny czas zatrzymania

Przypomnijmy, że koperta Snella jest nadmartyngałem, więc możemy zapisać ją w postaci rozkładu Doob'a $U_n = M_n - A_n$, gdzie (M_n) - martyngał, (A_n) - przewidywalny ciąg niemalejący $A_0 = 0$. Rozważmy zmienną:

$$\nu_{\max} = \begin{cases} N & A_N = 0 \\ \inf\{n : A_{n+1} \neq 0\} & A_N \neq 0 \end{cases}.$$

Zgodnie z rozważaniami z końca poprzedniego rozdziału, wystawca sprzedający opcję w tym momencie zarobi $U_{\nu_{max}} = V_{\nu_{max}}(\phi)$ i postępując zgodnie ze strategią ϕ w kolejnych momentach dla $k \in \{1, ..., N - \nu_{max}\}$ wygeneruje zysk:

$$V_{\nu_{max}+k}(\phi) = U_{\nu_{max}+k} + A_{\nu_{max}+k},$$

jako że $A_{\nu_{max}+1} > 0$ oraz (A_n) jest niemalejący, zysk wystawcy opcji będzie ściśle większy niż wartość opcji. Więc dla posiadacza opcji ostatni opłacalny moment wykonania to ν_{max}.

Twierdzenie 6.8. *ν_{max} jest największym optymalnym czasem zatrzymania (Z_n).*

Dowód. ν_{max} jest czasem zatrzymania, ponieważ

$$\{\nu_{max} = k\} = \bigcap_{n \leqslant k} \{A_n = 0\} \cap \{A_{k+1} > 0\} \in \mathcal{F}_k,$$

bo $A_{k+1} \in \mathcal{F}_k$, gdyż (A_n) jest przewidywalny.

W celu pokazania optymalności skorzystamy z 6.7.

$U_n = M_n - A_n$ wiemy z definicji ν_{max}, że $A_i = 0$ dla $i \leqslant \nu_{max}$. Więc $(U^{\nu_{max}}) = (M^{\nu_{max}})$. Skoro (M_n) jest martyngałem, to zastopowany ciąg $(M^{\nu_{max}})$ również, tak więc $(U^{\nu_{max}})$ - martyngał.

Dalej, możemy zapisać U_{max}:

$$U_{\nu_{max}} = \sum_{i=0}^{N-1} 1_{\{\nu_{max}=i\}} U_i + \mathbb{1}_{\{\nu_{max}=N\}} U_N = \sum_{i=0}^{N-1} 1_{\{\nu_{max}=i\}} \max(Z_i, \mathbb{E}[U_{i+1}|\mathcal{F}_i]) + \mathbb{1}_{\{\nu_{max}=N\}} Z_N,$$

ale na zbiorze $\{\nu_{max} = i\}$ mamy $A_i = 0, A_{i+1} > 0$, więc:

$$M_i = U_i = \max(Z_i, \mathbb{E}[U_{i+1}|\mathcal{F}_i]) = \max(Z_i, \mathbb{E}[M_{i+1} - A_{i+1}|\mathcal{F}_i]) = \max(Z_i, M_i - A_{i+1}) = Z_i,$$

dlatego $U_{\nu_{max}} = Z_{\nu_{max}}$, więc z tw. 6.6. ν_{max} jest optymalny.

Pozostaje pokazać, że jest to największy czas zatrzymania. Załóżmy, że istnieje większy czas zatrzymania $\nu \geqslant \nu_{max}$, wtedy:

$$\mathbb{E}[U_\nu] = \mathbb{E}[M_\nu] - \mathbb{E}[A_\nu] = \mathbb{E}[M_0] - \mathbb{E}[A_\nu] = \mathbb{E}[U_0] - \mathbb{E}[A_\nu] < \mathbb{E}[U_0],$$

co przeczy warunkowi 2. z twierdzenia 6.7. (U^ν) nie jest martyngałem, więc ν nie jest optymalny. $\square$

7 Ceny i optymalne wykonanie opcji amerykańskich

W poprzednich rozdziałach wyznaczyliśmy zależności jakie musi spełniać cena U_0 opcji amerykańskiej, żeby wystawca w każdej chwili był wypłacalny stosując strategię ϕ:

$$U_0 = V_0(\phi) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}[\tilde{Z}_\nu | \mathcal{F}_0].$$

7.1 Opcja call

Twierdzenie 7.1. *Niech U_n będzie ceną opcji amerykańskiej w chwili n, z której zysk opisuje ciąg $(Z_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, a C_n ceną opcji europejskiej wypłacającej Z_N w chwili N. Wtedy:*
(1) $U_n \geqslant C_n$
(2) jeżeli dla wszystkich n $C_n \geqslant Z_n$, to $C_n = U_n \quad \forall n \in \{0, 1, ..N\}$

Dowód. (1) zachodzi ponieważ opcja amerykańska uprawnia do tego co europejska i dodatkowo mamy możliwość wcześniejszego wykonania. Ściśle:

$$\tilde{U}_n = max(\tilde{Z}_n, \mathbb{E}[\tilde{Z}_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \geqslant \mathbb{E}[\tilde{Z}_N|\mathcal{F}_n] = \tilde{C}_n.$$

(2) Jeśli $C_n \geqslant Z_n$ to również $\tilde{C}_n \geqslant \tilde{Z}_n$, ponadto $(\tilde{C}_n)$ jest martyngałem więc:

$$\tilde{U}_n = max(\tilde{Z}_n, \mathbb{E}[\tilde{Z}_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \leqslant max(\tilde{C}_n, \mathbb{E}[\tilde{C}_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \tilde{C}_n,$$

stąd i z (1) $C_n = U_n$. □

Wniosek 7.2. *Ceny opcji kupna amerykańskiej i europejskiej z tą samą datą wygaśnięcia i ceną wykonania są równe.*

Dowód. $Z_n = (S_n - K)_+, \quad C_N = Z_N$, wtedy :

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_n &= \mathbb{E}[\tilde{C}_N|\mathcal{F}_n] = (1+r)^{-N}\mathbb{E}[C_N|\mathcal{F}_n] = (1+r)^{-N}\mathbb{E}[(S_N - K)_+|\mathcal{F}_n] \\
&\geqslant (1+r)^{-N}\mathbb{E}[S_N - K|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\tilde{S_N}|\mathcal{F}_n] - (1+r)^{-N}K \\
&= \tilde{S}_n - (1+r)^{-N}K.
\end{aligned}$$

Stąd $C_n \geqslant S_n - (1+r)^{n-N}K \geqslant S_n - K$, ponieważ $r > 0, n - N \leqslant 0$. Ponadto $C_n \geqslant 0$, więc $C_n \geqslant (S_n - K)_+ = Z_n$. Z poprzedniego twierdzenia $C_n = U_n$. □

Wynika z tego, że do wyceny amerykańskiej opcji kupna możemy używać wzoru Blacka- Scholesa wyznaczonego pod koniec czwartego rozdziału.

Zauważmy ponadto, że dla $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$: $U_n = C_n \geqslant (S_n - (1+r)^{n-N}K)_+ > (S_n - K)_+ = Z_n$, więc $U_n > Z_n$, czyli zgodnie z twierdzeniem 6.7 mamy jedyny optymalny czas zatrzymania opcji w momencie N.

Wniosek 7.3. *Opcji amerykańskiej call nie opłaca się wykonywać przed datą wygaśnięcia.*

Przykład 7.4. *Jeśli inwestor nie wierzy w nasze teoretyczne rozważania przeanalizujmy tą sytuację na przykładzie. Załóżmy, że posiadamy opcję kupna z ceną wykonania* $K = 50$ *na pewną akcję, która ma aktualną cenę* $S_0 = 100$*. Data wygaśnięcia przypada za pół roku. Kusząco wgląda wykonanie opcji teraz za* 50*. Możemy chcieć to zrobić z dwóch powodów:*

(1) wierzymy, że cena akcji wzrośnie - chcemy ją trzymać przez kolejne pół roku, jednak akcja nie przynosi zysków, gdy jest w portfelu. W tym wypadku bardziej opłacałoby się nam zapłacić za nią 50 *za pół roku niż teraz. Mogłoby się też okazać, że jej cena spadnie przez ten czas poniżej* 50*, wtedy wczesne wykonanie przyniesie straty, przed którymi może uratować czekanie. W tym przypadku późne wykonanie chroni nas przed wahaniami cen i zmianami wartości pieniądza w czasie.*

(2) uważamy, że jej wartość spadnie - chcemy ją odsprzedać od razu. Zarobimy na tym $S_0 - K = 50$*. Jednak wiemy, że aktualna cena opcji którą posiadamy spełnia* $C \geqslant S_0 - K = 50$*. Więc w tym przypadku bardziej opłaca się nam sprzedać opcję niż ją wykonywać.*

7.2 Cena opcji put w modelu CRR

Dla amerykańskiej opcji sprzedaży nie mamy takiego związku z opcją europejską. W szczególności nie istnieje jawny wzór pozwalający wyznaczyć jej cenę. Przyjmijmy założenia jak w rozdziale 4, żeby wyznaczyć wzór w modelu dwumianowym.

Z rozdziału piątego wiemy, że $U_n = \max(Z_n, (1+r)^{-1}\mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n])$. Niech $P_{am}(n,x)$ będzie funkcją wyznaczającą wartość opcji amerykańskiej put w chwili n przy wartości aktywa bazowego x. Dla $n \in \{0, 1, ..N-1\}$:

$$P_n = P_{am}(n, S_n) = \max((K - S_n)_+, (1+r)^{-1}\mathbb{E}[P_{n+1}|\mathcal{F}_n]), \tag{7.1}$$

oraz $P_N = P_{am}(N, S_N) = (K - S_N)_+$. Jeżeli znamy wartość instrumentu bazowego S_n w chwili n, to zgodnie z założeniami tego modelu w chwili $n+1$ może ona wynosić albo $S_n(1+a)$ z prawdopodobieństwem $p = \frac{b-r}{b-a}$ albo $S_n(1+b)$ z prawdopodobieństwem $1-p$. Stąd:

$$\mathbb{E}[P_{n+1}|\mathcal{F}_n] = pP_{am}(n+1, S_n(1+a)) + (1-p)P_{am}(n+1, S_n(1+b)) = f(n+1, S_n)$$

Możemy więc zapisać cenę w chwili 0:

$$P_0 = P_{am}(0, S_0) = \max((K - S_0)_+, \frac{f(1, S_0)}{(1+r)})$$

Zgodnie z teorią dotyczącą czasów zatrzymania, opłaca nam się wykonać opcję sprzedaży w pierwszej chwili, gdy jej wartość $P_n = (K - S_n)_+$, czyli gdy profit z natychmiastowego wykonania jest większy niż wartość oczekiwana profitu przy czekaniu. W tym przypadku wczesne wykonanie się opłaca, gdyż przez wykonanie otrzymujemy pieniądze, które możemy dalej inwestować i pozbywamy się ryzykownej opcji. Te same czynniki, które wpływały na to że opcji kupna nie opłaca się wykonywać wcześnie powodują, że opcję sprzedaży powinniśmy wykonać jak najszybciej.

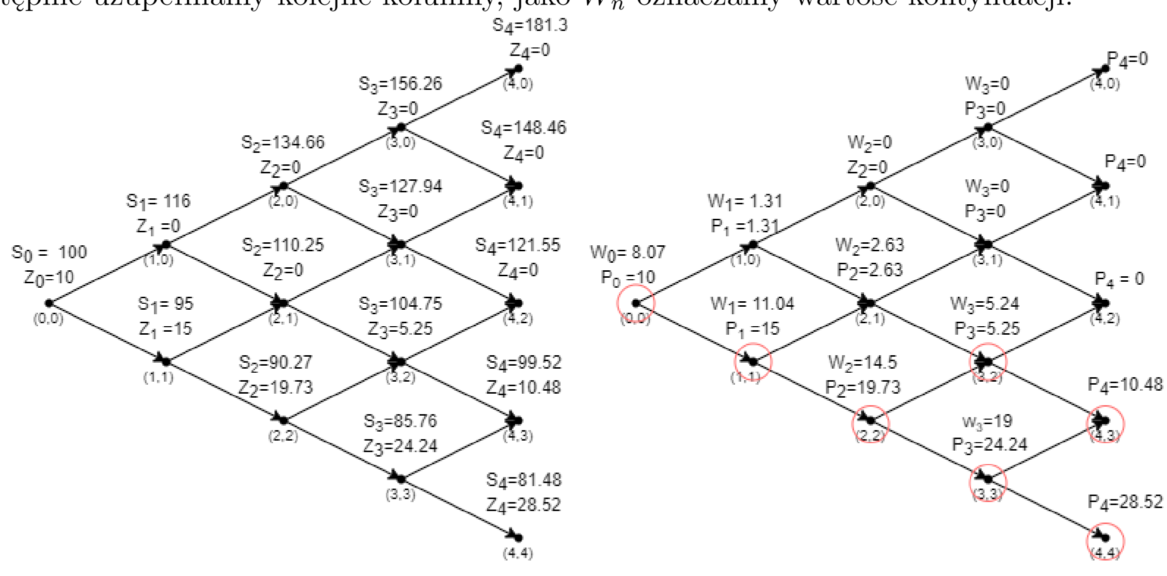
7.3 Przykład

Chcemy kontynuować przykład rozważany dla opcji europejskich. Przypomnijmy, że rozważamy model czterookresowy dla akcji wartej $S_0 = 100$, $\sigma = 0.2$ i wyznaczamy cenę opcji rocznej z ceną wykonania $K = 110$.

Wyznaczyliśmy: $1 + a \approx 0.95$, $1 + b \approx 1.16$, $p \approx 0.52$.

Wiemy z tego rozdziału, że opcja amerykańska *call* jest warta tyle samo co europejska i pierwszym optymalnym momentem wykonania jest data wygaśnięcia, z poprzednich wyliczeń wiemy już $C_0 = 13.656$. Ceny tej opcji zmieniają się tak samo jak na diagramie przedstawionym w rozdziale 4.6, więc zabezpieczanie opcji amerykańskiej odbywa się w ten sam sposób.

Chcąc wyznaczyć cenę opcji *put* najłatwiej jest posłużyć się diagramem. Obliczamy ceny w kolejnych węzłach zgodnie ze wzorem (7.1). Musimy więc obliczyć dwie wartości: zysk z natychmiastowego wykonania: $(K - S_n)_+$ i wartość oczekiwaną ceny opcji w kolejnym kroku $(1 + r)^{-1}\mathbb{E}[P_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ czyli tzw. wartość kontynuacji, a następnie wybrać większą z nich. Dlatego najpierw konstruujemy diagram na którym znajduje się zmiana cen akcji oraz payoff z wykonania w danym momencie (diagram po lewej). Następnie tworzymy już właściwy diagram (po prawej), ceny w ostatniej chwili (tutaj czwartej) przepisujemy z pierwszego diagramu, ponieważ wiemy że $P_N = Z_N = (K - S_N)_+$. Następnie uzupełniamy kolejne kolumny, jako W_n oznaczamy wartość kontynuacji.



Na przykład dla wierzchołka $(3, 3)$: $W_3 = 1.05^{-1} \cdot (p \cdot 28.52 + (1 - p) \cdot 10.48) =$

19 ale zysk z wykonania opcji w tym wierzchołku wynosi $Z_3 = 24.24$, więc $P_3 = max(24.24, 19) = 24.24$. Postępując tak z kolejnymi wierzchołkami dochodzimy do $(0, 0)$ i otrzymujemy $P_0 = 10$.

Strategię zabezpieczającą możemy wyznaczyć w ten sam sposób co przy opcjach europejskich.

Konstruując diagram możemy także wyznaczyć optymalny czas wykonania. Jak wiemy, jest to pierwszy moment, w którym wartość opcji jest równa zyskowi z wykonania. W tym przykładzie optymalną strategią okazuje się wykonanie opcji od razu po jej zakupie, czyli w chwili 0, ponieważ natychmiastowy zysk jest większy niż wartość kontynuacji. Oczywiście możemy zaryzykować, co może się opłacić, jeżeli wykonamy opcję w jednym z wierzchołków oznaczonych czerwonym okręgiem - tam wypłata z wykonania opcji jest większa niż wartość oczekiwana wypłaty przy czekaniu.

Literatura

[1] D. Lamberton and B. Lapeyre: *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996.

[2] J. C. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein: *Option Pricing: a Simplified Approach*, Journal of Financial Economics 7, 1979.

[3] R.J. Elliott and P.E. Kopp: *Mathematics of Financial Markets*, Second edition Springer, 2005.

[4] J.C.Hull: *Options, Futures and Other Derivatives*, Ninth edition, Pearson, 2015.