Uniwersytet Wrocław
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut matematyczny
specjalność: zastosowania rachunku prawdopodobieństwa i statystyki

Krzysztof Kępczyński

Zagadnienie paryskiej ruiny w gaussowskim modelu ryzyka

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Krzysztofa Dębickiego

Wrocław 2017

Spis treści

1 Wprowadzenie

Od wielu lat postępuje intensywny rozwój branży ubezpieczeniowej. Celem zakładów ubezpieczeniowych jest wypłata odpowiednich świadczeń w razie wystąpienia skutków zdarzeń losowych w zamian za regularnie wpłacane składki. Jedno z istotnych zagadnień polega na doborze wysokości składek oraz ustaleniu wysokości kapitału początkowego tak, aby zmaksymalizować zyski i zminimalizować prawdopodobieństwa bankructwa. Odpowiednią świata matematyki na ten problem jest teoria ryzyka. Jednym z zagadnień, które bada jest tak zwana ruina. To pojęcie można interpretować jako wystąpienie chwili, w której kapitał firmy jest mniejszy od zera. Zagadnienie ruiny zostało już dokładnie przebadane w bardzo ogólnych modelach, m. in. w [1], [7] i [9]. W rzeczywistym świecie może zdarzyć się również sytuacja, w której w jednym roku kapitał firmy jest mniejszy od zera, natomiast w kolejnych latach - większy. W takim przypadku lepszym rozwiązaniem, niż ogłaszanie bankructwa, wydaje się być wzięcie pożyczki lub "przeczekanie roku". Również w tym przypadku matematyka ma propozycję jak modelować taki problem. Jest nią paryska ruina. Oznacza ona sytuację, w której kapitał firmy jest mniejszy od zera przez pewien czas. To zagadnienie, choć istotne z punktu widzenia branży ubezpieczeniowej, nie zostało jeszcze dokładnie zbadane. Poruszane było m. in. w [3] i [4]. Niniejsza praca zawiera pewne nowe wyniki w tej dziedzinie. Zostanie w niej zbadane prawdopodobieństwo paryskiej ruiny w przypadku dyskretnym, tzn. sytuacji, w której kapitał firmy jest mniejszy od zera w kilku kolejnych chwilach. Będąc bardziej precyzyjnym, zbadane zostanie asymptotyczne zachowanie tego prawdopodobieństwa, gdy kapitał początkowy dąży do nieskończoności.

Rozdział 2 zawiera niezbędne definicje, dokładny opis modelu i kilka pomocniczych faktów.

Rozdział 3 stanowi zasadniczą część pracy. Przedstawione w nim zostaną twierdzenia dotyczące prawdopodobieństwa paryskiej ruiny. Rozdział ten składa się z dwóch części. Pierwsza zawiera logarytmiczną asymptotykę prawdopodobieństwa paryskiej ruiny, druga - dokładną.

2 Wstęp

2.1 Podstawowe definicje i użyteczne fakty

Ten rozdział zawiera podstawowe definicje i fakty, które będą przydatne w dalszej części pracy.
Mówimy, że funkcje rzeczywiste f i g są *asymptotycznie równoważne*, gdy $\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{g(u)}=1$. Piszemy wtedy $f(u)=g(u)\Big(1+o(1)\Big)$, gdy $u\to\infty$.
Piszemy $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, gdy X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią μ i wariancją σ^2. Piszemy $(X,Y)\sim N\Big(\vec{\mu},\Sigma\Big)$, gdy (X,Y) jest wektorem losowym o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z wektorem wartości oczekiwanych $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2)$ oraz macierzą kowariancji Σ.

Lemat 1. Niech $X\sim N(0,1)$. Wtedy

$$\mathbb{P}[X>u]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u\to\infty$.

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że u>0.
Dolne oszacowanie:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X>u]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty\frac{1}{x}(xe^{-\frac{x^2}{2}})dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big((-\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}})|_u^\infty-\int_u^\infty(-\frac{1}{x^2})(-e^{-\frac{x^2}{2}})dx\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty\frac{1}{x^3}(xe^{-\frac{x^2}{2}})dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big((-\frac{1}{x^3}e^{-\frac{x^2}{2}})|_u^\infty-\int_u^\infty-\frac{3}{x^4}(-e^{-\frac{x^2}{2}})dx\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u^3}e^{-\frac{u^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty\frac{3}{x^4}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\&\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u^3}e^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{u^2-1}{u^3}e^{-\frac{u^2}{2}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Górne oszacowanie:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X>u]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty\frac{x}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty\frac{x}{u}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}\int_u^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}\cdot(-e^{-\frac{x^2}{2}}|_u^\infty)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}.\end{aligned}\tag{2}$$

Zatem z (1) i (2) mamy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{u^2-1}{u^3}e^{-\frac{u^2}{2}} \leqslant \mathbb{P}[X>u] \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\mathbb{P}[X>u] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.
To kończy dowód. $\square$

Poniższy lemat będzie odgrywał ważną rolę w dowodzie głównego twierdzenia pracy.

Lemat 2. Niech $f(x) = x^{2H} + (1-x)^{2H} - 1$, $x \in (0,1)$, $H \in (0,1)$. Wtedy

1) $f(x) > 0$, gdy $H \in (0, \frac{1}{2})$,
2) $f(x) = 0$, gdy $H = \frac{1}{2}$,
3) $f(x) < 0$, gdy $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Dowód. Zauważmy, że $f'(x) = 2H[x^{2H-1} - (1-x)^{2H-1}]$.
Ad 1) Załóżmy, że $H \in (0, \frac{1}{2})$. Wówczas

$$f'(x) > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x^{2H} > (1-x)^{2H}.$$

Ponieważ $1 - 2H > 0$, to $f'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < \frac{1}{2}$.
Zatem funkcja f jest ściśle rosnąca dla $x \in [0, \frac{1}{2})$.

$$f'(x) < 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x^{2H} < (1-x)^{2H}.$$

Ponieważ $1 - 2H > 0$, to $f'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > \frac{1}{2}$.
Zatem funkcja f jest ściśle malejąca dla $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.

$$f'(x) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x^{2H} = (1-x)^{2H}.$$

Ponieważ $1 - 2H > 0$, to $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \frac{1}{2}$.
Stąd otrzymujemy, że funkcja f ma jedyne maksimum dla $x = \frac{1}{2}$.
Zauważmy, że $f(0) = 0$ oraz $f(1) = 0$.
Zatem $f(x) > 0$, gdy $x \in (0,1)$.
Ad 2) Załóżmy, że $H = \frac{1}{2}$.
Wówczas $f(x) = x^{2\cdot\frac{1}{2}} + (1-x)^{2\cdot\frac{1}{2}} - 1 = 0$, gdy $x \in (0,1)$.

Ad 3) Załóżmy, że $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Wówczas

$$f'(x) > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x^{2H} > (1-x)^{2H}.$$

Ponieważ $1 - 2H < 0$, to $f'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > \frac{1}{2}$.
Zatem funkcja f jest ściśle rosnąca dla $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.

$$f'(x) < 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x^{2H} < (1-x)^{2H}.$$

Ponieważ $1 - 2H < 0$, to $f'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < \frac{1}{2}$.
Zatem funkcja f jest ściśle malejąca dla $x \in [0, \frac{1}{2})$.

$$f'(x) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x^{2H} = (1-x)^{2H}.$$

Ponieważ $1 - 2H < 0$, to $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \frac{1}{2}$.
Zatem funkcja f jest ma jedyne minimum dla $x = \frac{1}{2}$.
Zauważmy, że $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.
Zatem $f(x) < 0$, gdy $x \in (0, 1)$.
To kończy dowód. □

Niniejszy fakt ilustruje pewną użyteczną w dalszej części pracy własność dwuwymiarowego rozkładu normalnego.

Lemat 3. Załóżmy, że $(X, Y) \sim N\Big((0,0), \Sigma\Big)$, gdzie $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$(X, Y) \sim (X, \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z),$$

gdzie $Z \sim N(0, 1)$ oraz Z jest stochastycznie niezależne od X.

Dowód. Niech $Z \sim N(0, 1)$ oraz Z będzie stochastycznie niezależne od X. Niech $\tilde{Y} = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z$. Wówczas $\tilde{Y}$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Wystarczy sprawdzić, że $Var[\tilde{Y}] = Var[Y]$, $\mathbb{E}[\tilde{Y}] = \mathbb{E}[Y]$ oraz $Cov(X, Y) = Cov(X, \tilde{Y})$.
Mamy

$$\begin{aligned}
Var[\tilde{Y}] &= \rho^2 Var[X] + (\sqrt{1-\rho^2})^2 Var[Z] = \rho^2 + (1-\rho^2) = 1 = Var[Y], \\
\mathbb{E}[\tilde{Y}] &= \rho \mathbb{E}[X] + \sqrt{1-\rho^2} \mathbb{E}[Z] = 0 = \mathbb{E}[Y], \\
Cov(X, \tilde{Y}) &= Cov(X, \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z) = \rho Cov(X, X) + \sqrt{1-\rho^2} Cov(X, Z) \\
&= \rho \cdot 1 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 = \rho = Cov(X, Y).
\end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy, że $(X, Y) \sim (X, \tilde{Y})$.
To kończy dowód. □

Następujące trzy lematy zostały udowodnione przez Elnaggara oraz Mukherjea w [6].

Lemat 4. Niech $(X,Y) \sim N\big((0,0),\Sigma\big)$, gdzie $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Niech $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \leqslant \beta$, $\rho < \dfrac{\alpha}{\beta}$. Wtedy

$$\mathbb{P}[X \geqslant \alpha t, Y \geqslant \beta t] = \frac{(1-\rho)^{3/2}\alpha^2\beta^2}{2\pi t^2(\alpha-\rho\beta)(\beta-\rho\alpha)} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2-2\rho\alpha\beta}{1-\rho^2}t^2}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.

Lemat 5. Niech $(X,Y) \sim N\big((0,0),\Sigma\big)$, gdzie $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Niech $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \leqslant \beta$, $\rho > \dfrac{\alpha}{\beta}$. Wtedy

$$\mathbb{P}[X > \alpha t, Y > \beta t] = \frac{1}{\beta t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 t^2}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.

Lemat 6. Niech $(X,Y) \sim N\big((0,0),\Sigma\big)$, gdzie $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Niech $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \leqslant \beta$, $\rho = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Wtedy dla $t > 0$

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}[Z \geqslant \beta t] \leqslant \mathbb{P}[X \geqslant \alpha t, Y \geqslant \beta t] \leqslant \mathbb{P}[Z \geqslant \beta t],$$

gdzie $Z \sim N(0,1)$.

Następująca klasa procesów stochastycznych grać będzie kluczową rolę w dalszych rozważaniach.

Definicja 2.1. Ułamkowym ruchem Browna $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ z parametrem Hursta $H \in (0,1]$ nazywamy proces stochastyczny spełniający następujące warunki

1) $B_H(0) = 0$ prawie na pewno,

2) $B_H(t)$ ma rozkład normalny ze średnią 0,

3) $Cov\Big(B_H(t), B_H(s)\Big) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.

Uwaga 1. Ułamkowy ruch Browna jest uogólnieniem ruchu Browna, w którym odrzuca się założenie o niezależności przyrostów. Zauważmy, że dla $H = \frac{1}{2}$ proces $\{B_{\frac{1}{2}}(t) : t \geqslant 0\}$ jest ruchem Browna.

Lemat 7. Przyrosty $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ są

1) ujemnie skorelowane, gdy $H \in (0, \frac{1}{2})$, tzn. dla dowolnych $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1$ zachodzi $Cov\Big(B_H(t_0), B_H(t_1) - B_H(t_0)\Big) < 0$,

2) niezależne, gdy $H = \frac{1}{2}$, tzn. dla dowolnych $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1$ zachodzi $Cov\Big(B_H(t_0), B_H(t_1) - B_H(t_0)\Big) = 0$,

3) dodatnio skorelowane, gdy $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ tzn. dla dowolnych $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1$ zachodzi $Cov\Big(B_H(t_0), B_H(t_1) - B_H(t_0)\Big) > 0$.

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1$ zachodzi
$Cov\Big(B_H(t_0), B_H(t_1) - B_H(t_0)\Big) = \frac{1}{2}\Big((t_1^{2H} - t_0^{2H}) - (t_1 - t_0)^{2H}\Big)$.
Teza wynika z Lematu 2. □

Ułamkowy ruch Browna z parametrem Hursta $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ma tzw. własność dalekiego zasięgu, co ilustruje następujący lemat.

Lemat 8. Niech $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Wówczas proces $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ ma własność dalekiego zasięgu, tzn. $\sum_{i=0}^{\infty} Cov\Big(B_H(0), B_H(i+1) - B_H(i)\Big) = \infty$.

Dowód. Dowód wynika z Twierdzenie 7.2.11 [10], str.337. □

2.2 Model

Jednym z wielu modeli badanych w teorii ryzyka jest klasyczny proces ryzyka

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdzie $u > 0$ jest kapitałem początkowym, $c > 0$ jest intensywnością wpłacanych składek, $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem nieujemnych niezależnych zmiennych losowych opisujących wysokości kolejnych odszkodowań, a $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$ modelującym chwile, w których następują żądania. Model ten został opisany na przykład w [2].

Okazuje się, że odpowiednio przeskalowany proces ryzyka zbiega do procesu ryzyka, w którym występuje ruch Browna. Bardziej formalnie, dla ciągu $U_n(t)$ procesów ryzyka zdefiniowanego następująco

$$U_n(t) = u + c_n t - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{N(nt)} X_i,$$

gdzie

1) zmienne losowe X_i mają wartość oczekiwaną μ oraz skończoną wariancję σ^2,
2) $c_n = c + \lambda\mu\sqrt{n}$,
3) $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$,

zachodzi następujące twierdzenie udowodnione przez Igleharta w [4].

Twierdzenie 1. Ciąg procesów ryzyka $U_n(t)$ zbiega słabo do procesu $u + ct - \sqrt{\lambda}\sigma B(t)$, gdzie $B(t)$ jest ruchem Browna.

Istnieje również matematyczne uzasadnienie dla rozważania pewnego uogólnienia poprzedniego procesu, w którym zamiast ruchu Browna występuje ułamkowy ruch Browna. W [7] wykazano, że $u + ct - B_H(t)$ dla $H \geqslant \frac{1}{2}$ stanowi graniczny model dla pewnego ciągu klasycznych procesów ryzyka.
W niniejszej pracy będziemy rozważali następujący proces ryzyka

$$U_H(t) = u + ct - B_H(t). \tag{3}$$

Okazuje się, że (3) dobrze modeluje sytuację finansową dużej firmy ubezpieczeniowej, do której zgłoszenia wypłaty odszkodowań przychodzą bardzo często. Wielkość $u > 0$ jest kapitałem początkowym, $c > 0$ jest stałą intensywnością wpłacanych składek, a ułamkowy ruch Browna odpowiada za wypłatę odszkodowań.
Niech $T > 0$. W przypadku ciągłym, mówimy, że w czasie $[0, T]$ zaszła *ruina* dla procesu $U_H(t)$ zdefiniowanego w (3), gdy istnieje $i \leqslant T$ takie, że $U_H(i) < 0$. *Prawdopodobieństwem ruiny* przy kapitale początkowym u nazywamy

$$\pi_{H,T}(u) = \mathbb{P}[\inf_{0 \leqslant t \leqslant T}(u - B_H(t) + ct) < 0] = \mathbb{P}[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T}(-u + B_H(t) - ct) > 0].$$

W przypadku klasycznego zagadnienia ruiny dla ułamkowego ruchu Browna znane są zarówno logarytmiczna asymptotyka prawdopodobieństwa ruiny, jak i dokładna. W szczególności, w modelu ciągłym, zachodzą następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2. Niech $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0,1]$. Niech $T > 0$. Wówczas

$$\frac{\log\Big(\pi_{H,T}(u)\Big)}{u^2} = -\frac{1}{2T^{2H}}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.

Twierdzenie 3. Niech $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0,1]$. Niech $T > 0$. Wówczas

1) Jeśli $H < \frac{1}{2}$, to

$$\pi_{H,T}(u) = \frac{\mathcal{H}_{2H}}{2^{\frac{1}{2H}}H}\frac{u^{\frac{1-3H}{H}}}{T^{1-3H}}e^{-\frac{(u+cT)^2}{2T^{2H}}}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$, gdzie $\mathcal{H}_H = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbb{E}\Big[e^{\max_{0\leqslant t\leqslant T}(\sqrt{2}B_{\frac{H}{2}}(t)-t^H)}\Big]$,

2) Jeśli $H = \frac{1}{2}$, to

$$\pi_{\frac{1}{2},T}(u) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{T^{\frac{1}{2}}}{u+cT}e^{-\frac{(u+cT)^2}{2T}}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$,

3) Jeśli $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, to

$$\pi_{H,T}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{T^H}{u+cT}e^{-\frac{(u+cT)^2}{2T^{2H}}}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$,

4) Jeśli $H = 1$, to

$$\pi_{1,T}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{T}{u+cT}e^{-\frac{(u+cT)^2}{2T^2}},$$

gdy $u \to \infty$.

Twierdzenie 3 zostało udowodnione w [5], a Twierdzenie 2 jest z niego prostym wnioskiem.
Zagadnienie ruiny można również rozpatrywać w czasie dyskretnym. W niniejszej pracy będziemy koncentrować się na tym przypadku.
Niech $T \in \mathbb{N}$. W przypadku dyskretnym, mówimy, że w czasie $[0,T]$ zaszła *paryska ruina* dla procesu $U_H(t)$ zdefiniowanego w (3), gdy istnieje $i \in \mathbb{N}$

takie, że $i+1 \leqslant T$, $U_H(i) < 0$ oraz $U_H(i+1) < 0$. *Prawdopodobieństwem paryskiej ruiny* przy kapitale początkowym u nazywamy

$$\hat{\pi}_{H,T}(u) = \mathbb{P}[\exists_{1<i+1\leqslant T} : B_H(i) > u + ci, B_H(i+1) > u + c(i+1)].$$

W Rozdziale 3 zbadamy prawdopodobieństwo paryskiej ruiny dla procesu ryzyka (3). W szczególności znajdziemy jego logarytmiczną asymptotykę dla $H \in (0,1)$ oraz, dla $H \geqslant \frac{1}{2}$ dokładną asymptotykę. Zauważmy, że przypadek $H = 1$ jest nieciekawy, ponieważ dla każdego $t \geqslant 0$ mamy $B_1(t) = tZ$, gdzie $Z \sim N(0,1)$.

3 Prawdopodobieństwo paryskiej ruiny

3.1 Logarytmiczna asymptotyka

Następujące twierdzenie opisuje logarytmiczną asymptotykę prawdopodobieństwa paryskiej ruiny. W celu jego udowodnienia posłużymy się kilkoma pomocniczymi lematami.

Twierdzenie 4. Niech $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0, 1)$. Niech $T \in \mathbb{N}$. Wówczas

1) dla $H \in (0, \frac{1}{2})$ mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(\hat{\pi}_{H,T}(u))}{u^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(T-1)^{2H}T^{2H}}\frac{1}{1-(\frac{1}{2}\frac{1}{(T-1)^H T^H}(T^{2H}+(T-1)^{2H}-1))^2},$$

2) dla $H = \frac{1}{2}$ mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(\hat{\pi}_{\frac{1}{2},T}(u))}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(T-1)^{2H}},$$

3) dla $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(\hat{\pi}_{H,T}(u))}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(T-1)^{2H}}.$$

Niniejszy lemat posłuży do znalezienia logarytmicznej asymptotyki prawdopodobieństwa paryskiej ruiny.

Lemat 9. Niech $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0, 1)$. Niech $s \leqslant t$. Wówczas

1) dla $H \in (0, \frac{1}{2})$ mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(\mathbb{P}[B_H(t) > u + ct, B_H(s) > u + cs])}{u^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{s^{2H}t^{2H}}\frac{(t-s)^{2H}}{1-(\frac{1}{2}\frac{1}{s^H t^H}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}))^2},$$

2) dla $H = \frac{1}{2}$ mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(\mathbb{P}[B_H(t) > u + ct, B_H(s) > u + cs])}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s^{2H}},$$

3) dla $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ mamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(\mathbb{P}[B_H(t) > u + ct, B_H(s) > u + cs])}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s^{2H}}.$$

Dowód. Niech $\alpha = \frac{s^H}{t^H}$, $\beta = 1$ i $\rho = Cov(\frac{B_H(t)}{t^H}, \frac{B_H(s)}{s^H})$.
Wówczas $\rho = \frac{1}{2}\frac{1}{s^H t^H}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$ oraz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \alpha\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \beta\frac{u+ct}{s^H}] \\
&= \mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+ct}{s^H}] \\
&\leqslant \mathbb{P}[B_H(t) > u+ct, B_H(s) > u+cs] \\
&= \mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{u+ct}{t^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}] \\
&\leqslant \mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}] \\
&= \mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \alpha\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \beta\frac{u+cs}{s^H}].
\end{aligned} \tag{4}$$

Z (4) wynika, że

$$\begin{aligned}
&\frac{\log(\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+ct}{s^H}])}{u^2} \\
&\leqslant \frac{\log(\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{u+ct}{t^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}])}{u^2} \\
&\leqslant \frac{\log(\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}])}{u^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ad 1) Załóżmy, że $H \in (0, \frac{1}{2})$. Wówczas $\frac{\alpha}{\beta} > \rho$.
Zauważmy, że $\frac{s^H}{t^H} > \rho$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\frac{s}{t})^{2H} - 1 + \Big(1 - (\frac{s}{t})\Big)^{2H} > 0$.
Niech $f(\frac{s}{t}) = (\frac{s}{t})^{2H} - 1 + \Big(1 - (\frac{s}{t})\Big)^{2H}$.
Zauważmy, że $0 < \frac{s}{t} < 1$.
Korzystając z Lematu 2 dla funkcji f otrzymujemy, że $f(\frac{s}{t}) > 0$, czyli
$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{2}\frac{1}{s^H t^H}\Big(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\Big)$.
Wróćmy do oszacowania (4). Z Lematu 4 otrzymujemy, że

$$\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+ct}{s^H}]$$
$$= \frac{(1-\rho)^{3/2}\alpha^2\beta^2}{2\pi(\frac{u+ct}{s^H})^2(\alpha-\rho\beta)(\beta-\rho\alpha)} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2-2\rho\alpha\beta}{1-\rho^2}(\frac{u+ct}{s^H})^2}\Big(1+o(1)\Big),$$
gdy $u \to \infty$

oraz

$$\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}]$$
$$= \frac{(1-\rho)^{3/2}\alpha^2\beta^2}{2\pi(\frac{u+cs}{s^H})^2(\alpha-\rho\beta)(\beta-\rho\alpha)} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2-2\rho\alpha\beta}{1-\rho^2}(\frac{u+cs}{s^H})^2}\Big(1+o(1)\Big),$$
gdy $u \to \infty$.

Ponieważ zachodzi (5),

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log\big(\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+ct}{s^H}]\big)}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2-2\rho\alpha\beta}{1-\rho^2}\frac{1}{s^{2H}}$$
oraz
$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log\big(\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}]\big)}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2-2\rho\alpha\beta}{1-\rho^2}\frac{1}{s^{2H}},$$

więc korzystając z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy tezę.
Ad 2) Załóżmy, że $H = \frac{1}{2}$. Wówczas $\frac{\alpha}{\beta} = \rho$.
Zauważmy, że $\frac{\alpha}{\beta} = \rho$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\frac{s}{t})^{2H} - 1 + \Big(1 - (\frac{s}{t})\Big)^{2H} = 0$.
Niech $f(\frac{s}{t}) = (\frac{s}{t})^{2H} - 1 + \Big(1 - (\frac{s}{t})\Big)^{2H}$.
Zauważmy, że $0 < \frac{s}{t} < 1$.
Korzystając z Lematu 2 otrzymujemy $f(\frac{s}{t}) = 0$, czyli $\frac{\alpha}{\beta} = \rho$.
Wróćmy do oszacowania (4). Z Lematu 6 otrzymujemy, że

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+ct}{s^H}] \leqslant \mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+ct}{s^H}] \leqslant \mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+ct}{s^H}] \tag{6}$$

oraz

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+cs}{s^H}] \leqslant \mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}] \leqslant \mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+cs}{s^H}], \tag{7}$$

gdzie $Z \sim N(0,1)$.
Korzystając z (4), (6) i (7) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+ct}{s^H}] \leqslant \mathbb{P}[B_H(t) > u+ct, B_H(s) > u+cs] \leqslant \mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+cs}{s^H}]. \quad (8)$$

Z (8) wynika

$$\frac{\log\Big(\frac{1}{2}\mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+ct}{s^H}]\Big)}{u^2} \leqslant \frac{\log\Big(\mathbb{P}[B_H(t) > u+ct, B_H(s) > u+cs]\Big)}{u^2} \leqslant \frac{\log\Big(\mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+cs}{s^H}]\Big)}{u^2}. \quad (9)$$

Ponadto zachodzi

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log\Big(\frac{1}{2}\mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+ct}{s^H}]\Big)}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s^{2H}}$$

oraz

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log\Big(\mathbb{P}[Z \geqslant \frac{u+cs}{s^H}]\Big)}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s^{2H}},$$

więc korzystając z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy tezę.
Ad 3) Załóżmy, że $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Wówczas $\frac{\alpha}{\beta} < \rho$.
Zauważmy, że $\frac{\alpha}{\beta} < \rho$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\frac{s}{t})^{2H} - 1 + \Big(1 - (\frac{s}{t})\Big)^{2H} < 0$.
Niech $f(\frac{s}{t}) = (\frac{s}{t})^{2H} - 1 + \Big(1 - (\frac{s}{t})\Big)^{2H}$.
Zauważmy, że $0 < \frac{s}{t} < 1$.
Korzystając z Lematu 2 otrzymujemy $f(\frac{s}{t}) < 0$, czyli $\frac{\alpha}{\beta} < \rho$.
Wróćmy do oszacowania (4). Z Lematu 5 otrzymujemy, że

$$\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+ct}{s^H}] = \frac{1}{\beta(\frac{u+ct}{s^H})\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2(\frac{u+ct}{s^H})^2}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$

oraz

$$\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}] = \frac{1}{\beta(\frac{u+cs}{s^H})\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2(\frac{u+cs}{s^H})^2}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.

Ponieważ zachodzi (5),

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log\big(\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+ct}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+ct}{s^H}]\big)}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{s^{2H}}$$

oraz

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log\big(\mathbb{P}[\frac{B_H(t)}{t^H} > \frac{s^H}{t^H}\frac{u+cs}{s^H}, \frac{B_H(s)}{s^H} > \frac{u+cs}{s^H}]\big)}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{s^{2H}},$$

więc korzystając z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy tezę.
To kończy dowód. $\square$

Lemat 10. Niech $B_H(t)$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0,1)$. Niech $T \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\begin{aligned}&\log\Big(\mathbb{P}[\exists_{1\leqslant i<j\leqslant T} : B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)\\&= \log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)\Big(1+o(1)\Big),\end{aligned}$$

gdy $u \to \infty$.

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}&\log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)\\&\leqslant \log\Big(\mathbb{P}[\exists_{1\leqslant i<j\leqslant T} : B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)\\&\leqslant \log\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)\\&\leqslant \log\Big(\binom{T}{2}\cdot max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)\\&= \log\Big(\binom{T}{2}\Big) + \log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big).\end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned}&\log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[(B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj)]\Big)\\&\leqslant \log\Big(\mathbb{P}[\exists_{1\leqslant i<j\leqslant T} : B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)\\&\leqslant \log\Big(\binom{T}{2}\Big) + \log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie przez u^2 otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\frac{\log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(i) > u+cj]\Big)}{u^2}\\&\leqslant \frac{\log\Big(\mathbb{P}[\exists_{1\leqslant i<j\leqslant T} : B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)}{u^2}\\&\leqslant \frac{\log\Big(\binom{T}{2}\Big) + \log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i) > u+ci, B_H(j) > u+cj]\Big)}{u^2}.\end{aligned}$$

Ponieważ zachodzi

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i)>u+ci, B_H(i)>u+cj]\Big)}{u^2}$$
$$= \lim_{u\to\infty} \frac{\log\Big(\binom{T}{2}\Big)+\log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[B_H(i)>u+ci, B_H(j)>u+cj]\Big)}{u^2},$$

więc korzystając z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\log\Big(\mathbb{P}[\exists_{1\leqslant i<j\leqslant T}: B_H(i)>u+ci, B_H(j)>u+cj]\Big)$$
$$= \log\Big(max_{1\leqslant i<j\leqslant T}\mathbb{P}[(B_H(i)>u+ci, B_H(j)>u+cj)]\Big)\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u\to\infty$.

Co było do udowodnienia. □

Poniższy lemat redukuje problem znalezienia asymptotyki prawdopodobieństwa paryskiej ruiny do znalezienia prawdopodobieństwa wystąpienia ruiny w dwóch kolejnych chwilach.

Lemat 11. Niech $B_H(t)$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H\in(0,1)$. Niech $T\in\mathbb{N}$. Wówczas

$$\hat{\pi}_{H,T}(u) = \mathbb{P}[B_H(T-1)>u+c(T-1), B_H(T)>u+cT]\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u\to\infty$.

Dowód. Zauważmy, że

$$\mathbb{P}[B_H(T-1)>u+c(T-1), B_H(T)>u+cT]$$
$$\leqslant \hat{\pi}_{H,T}(u)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{T-1}\mathbb{P}[B_H(i)>u+ci, B_H(i)>u+c(i+1)].$$

Wystarczy zatem pokazać, że dla $H\in(0,1)$ i każdego $1\leqslant i<T$ zachodzi

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\log\Big(\frac{\mathbb{P}[B_H(i)>u+c(i),B_H(i+1)>u+c(i+1)]}{\mathbb{P}[B_H(n-1)>u+c(n-1),B_H(n)>u+cn]}\Big)}{u^2}<0.$$

W tym celu rozważymy dwa przypadki.
Ad 1) Niech $H\in(0,\frac{1}{2})$.
Korzystając z Lematu 9 otrzymujemy, że

$$\frac{\log\Big(\mathbb{P}[B_H(i)>u+ci, B_H(i+1)>u+c(i+1)]\Big)}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{i^{2H}(i+1)^{2H}}\frac{1}{1-\rho^2}\Big(1+o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$,
gdzie $\rho = \frac{1}{2}\frac{1}{i^H(i+1)^H}\Big((i+1)^{2H} + i^{2H} - 1\Big)$.
Zatem wystarczy zminimalizować następującą funkcję

$$\begin{aligned} g(i) &= \frac{1}{i^{2H}(i+1)^{2H}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{i^H(i+1)^H}\Big((i+1)^{2H} + i^{2H} - 1\Big)\right)^2} \\ &= \frac{4}{-\Big((i+1)^{2H} + i^{2H}\Big)^2 + 2i^{2H} + 2(i+1)^{2H} - 1}. \end{aligned}$$

Równoważnie, musimy zmaksymalizować następującą funkcję

$$h(i) = -\Big((i+1)^{2H} + i^{2H}\Big)^2 + 2i^{2H} + 2(i+1)^{2H} - 1.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} h'(i) &= 4H[(i+1)^{2H-1}x^{2H} + (i+1)^{2H}x^{2H-1} + i^{2H-1} - i^{4H-1} + (i+1)^{2H-1} - (i+1)^{4H-1}] \\ &= 4H[(i+1)^{2H-1}(i^{2H} + 1^{2H}) + i^{2H-1}((i+1)^{2H} + 1^{2H}) - i^{4H-1} - (i+1)^{4H-1}] \quad (10) \\ &> 4H[(i+1)^{2H-1}(i+1)^{2H} + i^{2H-1}(x+2)^{2H} - i^{4H-1} - (i+1)^{4H-1}] \\ &= 4H[(i+1)^{4H-1} + i^{2H-1}(i+2)^{2H} - i^{4H-1} - (i+1)^{4H-1}] > 0. \end{aligned}$$

W (10) korzystamy z nierówności $(i+1)^{2H} < i^{2H} + 1$, która została udowodniona w Lemacie 2 i zachodzi dla każdego $i > 0$ i dla każdego $H \in (0, \frac{1}{2})$.
Stąd $h(i)$ jest ściśle rosnąca. Zatem swoje jedyne maksimum dla $1 \leqslant i \leqslant T-1$ osiąga w punkcie $i = T-1$. Stąd $g(i)$ osiąga swoje jedyne minimum w punkcie $i = T-1$.
To potwierdza tezę.
Ad 2) Niech $H \in [\frac{1}{2}, 1)$.
Korzystając z Lematu 9 otrzymujemy

$$\frac{\log(\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, B_H(i+1) > u + c(i+1)])}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{i^{2H}}\Big(1 + o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.
Zatem wystarczy zminimalizować następującą funkcję $g(i) = \frac{1}{i^{2H}}$. Funkcja $g(i)$ jest ściśle malejąca. Zatem swoje jedyne minimum dla $1 \leqslant i \leqslant T-1$ osiąga w punkcie $i = T-1$.
To kończy dowód. □

Dowód Twierdzenia 4. Wynika bezpośrednio z Lematu 11 i Lematu 9, gdy $s = t-1$. □

3.2 Dokładna asymptotyka

Następujące twierdzenie jest głównym wynikiem pracy. Dotyczy ono modelu (3) dla $H \in [\frac{1}{2}, 1)$. Przypadek $H \in (0, \frac{1}{2})$ jest bardzo trudny i nie będzie analizowany w niniejszej pracy. Ma on także mniejsze znaczenie aplikacyjne, gdyż, jak wynika z [7], w granicznych modelach ryzyka występuje jedynie ułamkowy ruch Browna z parametrem $H \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Twierdzenie 5. Niech $B_H(t)$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in [\frac{1}{2}, 1)$. Niech $T \in \mathbb{N}$. Wówczas

1) dla $H = \frac{1}{2}$ mamy

$$\hat{\pi}_{\frac{1}{2},T}(u) = \frac{\mathbb{P}[Z > c]\sqrt{T-1}}{\sqrt{2\pi}\Big(u + c(T-1)\Big)} \cdot e^{-\frac{u^2+2uc(T-1)+c^2(T-1)^2}{2(T-1)}}\Big(1 + o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$,

2) dla $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ mamy

$$\hat{\pi}_{H,T}(u) = \frac{(T-1)^H}{\sqrt{2\pi}\Big(u + c(T-1)\Big)} \cdot e^{-\frac{u^2+2uc(T-1)+c^2(T-1)^2}{(T-1)^{2H}}}\Big(1 + o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.

Dowód twierdzenia będzie wnioskiem z poniższego lematu i Lematu 11.

Lemat 12. Niech $\{B_H(t) : t \geqslant 0\}$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in [\frac{1}{2}, 1)$. Niech $0 \leqslant i \leqslant j$. Wówczas

1) dla $H = \frac{1}{2}$ mamy

$$\mathbb{P}[B_{\frac{1}{2}}(i) > u + ci, B_{\frac{1}{2}}(j) > u + cj] = \frac{\mathbb{P}[Z > c(j-i)]\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi}(u + ci)} \cdot e^{-\frac{u^2+2uci+c^2i^2}{2i}}\Big(1 + o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$, gdzie $Z \sim N(0, 1)$;

2) dla $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ mamy

$$\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, B_H(j) > u + cj] = \frac{i^H}{\sqrt{2\pi}(u + ci)} \cdot e^{-\frac{u^2+2uci+c^2i^2}{2i^{2H}}}\Big(1 + o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$.

Dowód. Korzystając z Lematu 3 dla wektora $\Big(B_H(i), B_H(j)\Big)$ otrzymujemy $\Big(B_H(i), B_H(j)\Big) \sim \Big(B_H(i), (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i) + j^H\sqrt{1-\rho^2}Z\Big)$, gdzie Z ma rozkład standardowy normalny oraz jest stochastycznie niezależne od $B_H(i)$, a
$\rho = \frac{1}{2i^H j^H}\Big(j^{2H} + i^{2H} - (j-i)^{2H}\Big)$.
Mamy zatem

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, B_H(j) > u + cj] \\
&= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i) + j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj] \\
&= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)].
\end{aligned}
$$

Ad 1) Niech $H = \frac{1}{2}$.
Zauważmy, że dla $H = \frac{1}{2}$ zachodzi

$$
1 - (\frac{j}{i})^H \rho = 1 - \sqrt{\frac{j}{i}}\frac{1}{2\sqrt{ij}}\Big(j + i - (j-i)\Big) = 1 - \frac{1}{2i}2i = 1 - 1 = 0.
$$

Dolne oszacowanie:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)] \\
&\geqslant \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho (u + ci)] \\
&= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c\Big(j - (\frac{j}{i})^H \rho i\Big)] \\
&= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i)].
\end{aligned}
$$

Górne oszacowanie:

$$\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho B_H(i)]$$

$$= \mathbb{P}[B_H(i) \in (u + ci, u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}], j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho B_H(i)]$$

$$+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho B_H(i)]$$

$$\leqslant \mathbb{P}[B_H(i) \in (u + ci, u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}], j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho(u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}})]$$

$$+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho B_H(i)]$$

$$= \mathbb{P}[B_H(i) \in (u + ci, u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}]] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho(u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}})]$$

$$+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho B_H(i)]$$

$$= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{j}{i})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big) - (\frac{j}{i})^H\rho\frac{1}{\sqrt{u}}]$$

$$+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}]$$

$$= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i) - \frac{1}{\sqrt{u}}]$$

$$+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}]$$

$$= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i)]\Big(1 + o(1)\Big).$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i)] \\
&\leqslant \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho B_H(i)] \\
&\leqslant \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i) - \frac{1}{\sqrt{u}}] \\
&+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}].
\end{aligned}$$

Z faktów, że

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i)]}{\mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i) - \frac{1}{\sqrt{u}}]} = 1 \quad \text{i} \lim_{u\to\infty}\frac{\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}]}{\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]} = 0$$

wynika

$$\lim_{u\to\infty}\Big(\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]\cdot\mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i)]\Big)$$
$$= \lim_{u\to\infty}(\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]\cdot\mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > c(j-i) - \frac{1}{\sqrt{u}}]\Big)$$
$$+ \lim_{u\to\infty}\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}].$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach i Lematu 1 dla $\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]$ otrzymujemy tezę.
Ad 2) Niech $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.
Zauważmy na początku, że dla $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ zachodzi

$$1 - (\frac{j}{i})^H\rho = 1 - (\frac{j}{i})^H\frac{1}{2i^Hj^H}\Big(j^{2H} + i^{2H} - (j-i)^{2H}\Big)$$
$$= 1 - \frac{1}{2i^{2H}}\Big(j^{2H} + i^{2H} - (j-i)^{2H}\Big) < 0.$$

Równoważnie, $1 < \frac{1}{2i^{2H}}\Big(j^{2H} + i^{2H} - (j-i)^{2H}\Big)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < 1 - (\frac{i}{j})^{2H} - \Big(1 - (\frac{i}{j})\Big)^{2H}$, co wynika z Lematu 2.
Dolne oszacowanie:

$$\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho B_H(i)]$$
$$\geqslant \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H\rho(u+ci)]$$
$$= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{j}{i})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big)]$$
$$= \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]\cdot\mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{j}{i})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big)].$$

Górne oszacowanie:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)]\\
&= \mathbb{P}[B_H(i) \in (u+ci, u+ci+\frac{1}{\sqrt{u}}], j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)]\\
&+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)]\\
&\leqslant \mathbb{P}[B_H(i) \in (u+ci, u+ci+\frac{1}{\sqrt{u}}], j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho (u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}})]\\
&+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)]\\
&= \mathbb{P}[B_H(i) \in (u+ci, u+ci+\frac{1}{\sqrt{u}}]] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho (u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}})]\\
&+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)]\\
&\leqslant \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{i}{j})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big) - (\frac{i}{j})^H\rho\frac{1}{\sqrt{u}}]\\
&+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}].
\end{aligned}
$$

Stąd otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{j}{i})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big)]\\
&\leqslant \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci, j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u + cj - (\frac{j}{i})^H \rho B_H(i)]\\
&\leqslant \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{i}{j})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big) - (\frac{i}{j})^H\rho\frac{1}{\sqrt{u}}]\\
&+ \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}].
\end{aligned}
$$

Z faktów, że

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{j}{i})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big)] = 1$$

oraz

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}]}{\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]} = 0$$

wynika

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]$$
$$= \lim_{u\to\infty} \Big(\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci] \cdot \mathbb{P}[j^H\sqrt{1-\rho^2}Z > u\Big(1 - (\frac{i}{j})^H\rho\Big) + c\Big(j - (\frac{j}{i})^H\rho i\Big) - (\frac{i}{j})^H\rho\frac{1}{\sqrt{u}}]\Big)$$
$$+ \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}[B_H(i) > u + ci + \frac{1}{\sqrt{u}}].$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach i Lematu 1 dla $\mathbb{P}[B_H(i) > u + ci]$ otrzymujemy tezę. □

Dowód Twierdzenia 5. Na mocy Lematu 11 wiemy, że

$$\hat{\pi}_{H,T}(u) = \mathbb{P}[B_H(T-1) > u + c(T-1), B_H(T) > u + cT]\Big(1 + o(1)\Big),$$

gdy $u \to \infty$. Wystarczy zatem znaleźć asymptotyczne zachowanie $\mathbb{P}[B_H(T-1) > u + c(T-1), B_H(T) > u + cT]$, gdy $u \to \infty$. Z Lematu 12 zastosowanego dla $i = T - 1$ oraz $j = T$ wynika teza. □

Uwaga 2. Korzystając z tych samych metod co w dowodzie Lematu 12 możemy udowodnić analogiczny wynik dla prawdopodobieństwa paryskiej ruiny, w którym ruina następuje w k kolejnych chwilach. Postać asymptotyki znacznie się jednak komplikuje wraz ze wzrostem k. Dlatego w niniejszej pracy ograniczyliśmy się do przedstawienia wyników jedynie w przypadku $k = 2$.

Literatura

[1] Asmussen, S. Ruin probabilities, World Scientific, 2000.

[2] Cramér, H. On the Mathematical Theory of Risk. Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930

[3] Czarna, I., Li, Y., Palmowski, Z., Zhao, C.(2017) The joint distribution of the Parisian ruin time and the number of claims until Parisian ruin in the classical risk model, Journal of Computational and Applied Mathematics 313, 499-514.

[4] Czarna, I., Renaud, J.-F. (2016) A note on Parisian ruin with an ultimate bankruptcy level for Lévy insurance risk processes, Statistics Probability Letters 2016, Vol. 113, 54-61.

[5] Dębicki, K., Rolski, T. (2002) A note on transient Gaussian fluid models. Queueing Systems, 41, 321-342.

[6] Elnaggar, M., Mukherjea, A. (2012) Solution of the problem of the identified minimum for the trivariate normal. Proceedings of the Indian Academy of Sciences – Section A, Vol. 122, No.4, 23-37.

[7] Michna, Z. (1998) Self-similar processes in collective risk theory. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 11:4, 429-448.

[8] Michna, Z. Modele graniczne w teorii ryzyka ubezpieczeniowego. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Seria: Monografie i Opracowania (nr 100), 2004.

[9] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley Series in Probability and Statistics, 1999.

[10] Samorodnitsky, G., Taqqu, M. S. Stable non-Gaussian random processes. Stochastic Models with Infinite Variance. Chapman and Hall/CRC, 1994.