Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: zastosowania rachunku prawdopodobieństwa i statystyki

Oliwier Biernacki

Spacery losowe i sieci elektryczne

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Dariusza Buraczewskiego

Wrocław, Rok 2018

Spis treści

Wstęp

Mając dany łańcuch Markowa, chcemy poznać odpowiedzi na pytania: jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer startujący z wierzchołka x trafi w wierzchołek y, zanim dotrze do wierzchołka z? Ile czasu potrzebujemy, żeby trafić w wierzchołek y? Ile czasu potrzeba, aby odwiedzić przynajmniej raz każdy z wierzchołków? Odpowiedzi na te pytania możemy znaleźć, szukając analogii pomiędzy łańcuchami Markowa, a sieciami elektrycznymi. Chcemy zdefiniować sieć elektryczną, a następnie znaleźć probabilistyczne interpretacje odpowiednich wielkości i związki pomiędzy nimi.

W pierwszym rozdziale zdefiniujemy sieć elektryczną, przytaczając odpowiednie definicje i twierdzenia, zaczerpnięte z literatury. W rozdziale drugim dokonam samodzielnej analizy czasów pokrycia dla kilku szczególnych przypadków grafów, bazując na teorii przedstawionej we wcześniejszym rozdziale.

1 Wprowadzenie do sieci elektrycznych

1.1 Sieci elektryczne

Rozważmy graf $G = (V, E)$, wraz z określoną na nim siecią elektryczną:

- Dla każdej krawędzi $e \in E$ dana jest jej przepustowość (konduktancja) $C(e)$. Odwrotność przepustowości nazywamy oporem (rezystancją) krawędzi $R(e)$. Zakładamy, że $C(e) \in [0, \infty]$.
- Dla każdego wierzchołka $x \in V$ dany jest jego potencjał $v(x)$. Różnicę potencjałów między dwoma wierzchołkami $x, y \in V$ nazywamy napięciem $U(x, y) = v(x) - v(y)$. Jeżeli e jest krawędzią wychodzącą z wierzchołka x skierowaną do wierzchołka y, możemy zapisać $U(e) = U(x, y)$.
- Przez każdą krawędź $e \in E$ płynie prąd o natężeniu $i(e)$. Jeżeli e jest krawędzią łączącą wierzchołki x i y, to możemy zapisać $i(e) = i(x, y)$.

Powyższe wielkości powiązane są ze sobą następującymi prawami:

- **Prawo Ohma** - dla każdej krawędzi $e \in E$ mamy
$$R(e) = \frac{U(e)}{i(e)}$$
- **I Prawo Kirchhoffa** - dla każdego wierzchołka $x \in V$ zachodzi
$$\sum_{y \sim x} i(x, y) = 0,$$
gdzie $y \sim x$ oznacza sumowanie po tych wierzchołkach, które są połączone krawędzią z wierzchołkiem x.

1.2 Związki pomiędzy sieciami elektrycznymi, a łańcuchami Markowa

Mając daną sieć elektryczną możemy zdefiniować na niej spacer losowy w następujący sposób. Niech $x \in V$. Wówczas dla $y \sim x$ określamy:

$$P(x, y) = \frac{C(x, y)}{\sum_{z \sim x} C(x, z)} := \frac{C(x, y)}{C(x)}$$

Dla danego łańcucha Markowa nie zawsze jednak jest możliwe określenie równoważnej sieci elektrycznej. Jest to możliwe tylko w przypadku odwracalnych spacerów losowych, tzn. takich, że dla dowolnych $x, y \in V$ spełnione jest
$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x)$$
Wówczas możemy określić przepustowości krawędzi:

$$C(x, y) = \pi(x)P(x, y)$$

Oczywiście możemy przemnożyć przez stałą wszystkie przepustowości w grafie bez zmiany zachowania łańcucha. Zauważmy, że warunek odwracalności gwarantuje, że definicja przepustowości nie zależy od wyboru wierzchołka, tzn. $C(x, y) = C(y, x)$. Warunek odwracalności jest spełniony przez każdy prosty spacer losowy, tzn. taki w którym w każdej chwili wychodzimy z danego wierzchołka jedną z krawędzi i wybór każdej jest jednakowo prawdopodobny, czyli wszystkie krawędzie mają jednakowe przepustowości (i takie właśnie będziemy rozważać w rozdziale 2).

1.3 Funkcje harmoniczne

Rozważamy graf spójny $G = (V, E)$ z prawdopodobieństwami przejść $P(x, y)$. Zbiór wierzchołków V dzielimy na dwa rozłączne zbiory: wnętrze (D) oraz brzeg (B), w taki sposób, aby każdy wierzchołek z brzegu był połączony krawędzią z co najmniej jednym wierzchołkiem z wnętrza grafu.

Definicja Funkcja f jest harmoniczna na D, jeżeli dla każdego $x \in D$

$$f(x) = \sum_{y \sim x} P(x, y) f(y).$$

Fakt Dla funkcji $f_0 : B \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieje jej jednoznaczne rozszerzenie do funkcji $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonicznej na D.

Przedstawmy B jako sumę rozłącznych zbiorów A i Z: $B = A \cup Z$. Rozważmy funkcję $\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}$, taką że dla każdego $x \in V, \rho(x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że spacer losowy startujący z x trafi w A zanim trafi w Z. Zakładamy, że $\rho \restriction A \equiv 1$ oraz $\rho \restriction Z \equiv 0$. Oczywiście funkcja ρ jest harmoniczna na D. Łatwo pokazać, że funkcja potencjału v zdefiniowana na brzegu B, jest harmoniczna na D. Niech $v \restriction A \equiv 1$ oraz $v \restriction Z \equiv 0$. Z jednoznaczności rozszerzenia wynika, że $v \equiv \rho$. Co za tym idzie, potencjał danego wierzchołka oznacza prawdopodobieństwo, że startujący z niego spacer losowy uderzy w A, zanim uderzy w Z.

1.4 Prawdopodobieństwo ucieczki i opór efektywny

Załóżmy, że $A = \{a\}$ oraz $Z = \{z\}$ i połóżmy napięcie $v(a) = 1, v(z) = 0$. Rozważmy prąd i^* wpływający do układu w punkcie a. Wówczas:

$$i^* = \sum_{x \sim a} i(a, x) = \sum_{x \sim a} \frac{v(a) - v(x)}{R(a, x)} = \sum_{x \sim a} (1 - v(x)) C(a, x) = C(a) \left(1 - \sum_{x \sim a} v(x) P(a, x) \right)$$

Ponieważ $v(x)$ oznacza prawdopodobieństwo powrotu do a zanim dotrzemy do z to $\frac{i^*}{C(a)}$ oznacza prawdopodobieństwo, że po wyjściu z a trafimy w z przed powrotem do a. Nazwiemy tę wartość prawdopodobieństwem ucieczki i oznaczymy p_{esc}. Zdefiniujmy teraz opór efektywny i efektywną przepustowość jako

$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{C_{\text{eff}}} = \frac{1}{i^*}$$

Intuicyjnie możemy myśleć o układzie jak o dużym oporniku. Opór efektywny został zdefiniowany w taki sposób, aby było spełnione prawo Ohma:

$$v(a) - v(z) = 1 = i^* R_{\text{eff}}$$

Zwróćmy uwagę, że opór efektywny definiujemy dla układu, gdzie napięcie pomiędzy punktami a i z wynosi 1. Załóżmy teraz, że do napięcie podłączono w taki sposób, że przez układ płynie prąd jednostkowy, tzn. $v(z) = 0$, a $v(a)$ jest odpowiednio dobraną wartością. Ponownie spełnione jest prawo Ohma, zatem skoro $v(z) = 0$, a $i = 1$, to

$$v(a) = v(a) - v(z) = i R_{\text{eff}} = R_{\text{eff}}.$$

Zauważmy, że ponieważ $C(a)$ jest stałą, to opór efektywny jest odwrotnie proporcjonalny do prawdopodobieństwa ucieczki. Zastanówmy się teraz, co stanie się w przypadku, gdy zwiększymy opór pewnej krawędzi. Intuicyjnie może się wydawać, że p_{esc} powinno zmaleć. Odpowiedź przynosi następujące twierdzenie:

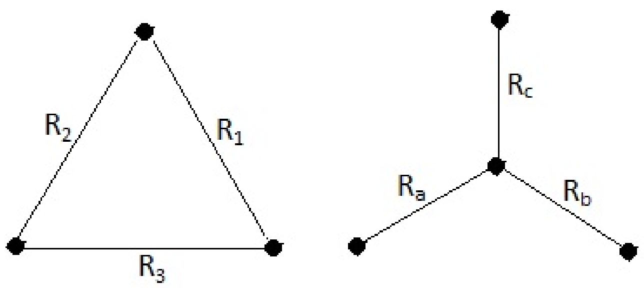
Twierdzenie(Prawo monotoniczności Rayleigha) Jeżeli zwiększymy rezystancje poszczególnych oporników w układzie, to efektywny opór tego układu może jedynie wzrosnąć. Jeżeli opory maleją - rezystancja efektywna może tylko maleć.

1.5 Redukcja sieci elektrycznych

Skomplikowane układy oporników możemy redukować do prostszych, korzystając z prostych faktów.

- **Łączenie szeregowe**- układ oporników o oporach $R_1, ..., R_k$ połączonych szeregowo możemy zastąpić jednym o oporze $R = R_1 + ... + R_k$
- **Łączenie równoległe**- układ oporników o oporach $R_1, ..., R_k$ połączonych równolegle możemy zastąpić jednym o oporze R spełniającym
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + ... + \frac{1}{R_k}$$
Lub zapisując w języku konduktancji: $C = C_1 + ... + C_k$.
- **Transformacja gwiazda-trójkąt** - przedstawione na rysunku układy krawędzi można równoważnie zamieniać, przy czym wartości ich oporów obliczamy na podstawie poniższych wzorów (podanych dla R_1 oraz R_a, ale analogicznych dla pozostałych wartości).

$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a}$$



Rysunek 1: Trójkąt i gwiazda

1.6 Czasy uderzenia i pokrycia

Definicja Niech $G = (V, E)$, oraz $a, z \in V$. Niech X_t będzie spacerem losowym po V, startującym w a oraz $\tau_z = \min\{t : X_t = z\}$.

- *czasem uderzenia* w z spaceru startującego z a nazywamy wartość $\mathbb{E}_a \tau_z$
- *czasem pokrycia* grafu G nazywamy wartość $\mathbb{E}\sigma$, gdzie $\sigma = \max_{x \in V} \tau_x$; wartość tę oznaczamy $\mathbb{E}[Cov]$

Do obliczania czasów uderzenia, oraz szacowania czasów pokrycia pomocne są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1 Dany jest łańcuch Markowa z przestrzenią stanów V oraz miarą stacjonarną $\pi(x)$. Do wierzchołków $a, z \in V$ podłączono napięcie w taki sposób, że $v(z) = 0$, a $v(a)$ dobrano tak, aby przez układ płynął prąd o natężeniu 1. Wówczas

$$\mathbb{E}_a \tau_z = \sum_{x \in V} \pi(x) v(x)$$

Twierdzenie 2 (Górne ograniczenie na czas pokrycia) Dla skończonego, nieredukowalnego łańcucha Markowa z n-elementową przestrzenią stanów V zachodzi

$$\mathbb{E}[Cov] \leq \left(\max_{a,b \in V} \mathbb{E}_a \tau_b \right) \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} \right)$$

Twierdzenie 3 (Dolne ograniczenie na czas pokrycia) Dla skończonego, nieredukowalnego łańcucha Markowa z przestrzenią stanów V zachodzi

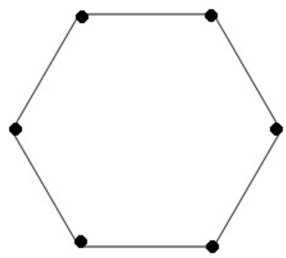
$$\mathbb{E}[Cov] \geq \left(\max_{A \subseteq V} t_{\min}^{A}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{|A|-1}\right),$$

gdzie $t_{\min}^{A} = \min_{a,b \in A, a \neq b} \mathbb{E}_a \tau_b$

2 Analiza czasów pokrycia

2.1 Prosty spacer po $\mathbb{Z}_n$

Chcemy znaleźć czas pokrycia $\mathbb{Z}_n$ dla prostego spaceru losowego. Rozważamy zbiór wierzchołków $V = \{0, 1, ..., n-1\}$ oraz spacer X_n, taki że $X_0 = 0$ oraz $\mathbb{P}[X_{k+1} = X_k +_n 1] = \mathbb{P}[X_{k+1} = X_k -_n 1] = \frac{1}{2}$ dla dowolnego k, gdzie $+_n$ oraz $-_n$ są działaniami odpowiednio dodawania i odejmowania modulo n.



Rysunek 2: $\mathbb{Z}_n$ dla $n = 6$

Skorzystamy najpierw z oszacowań przytoczonych w poprzednim rozdziale, a następnie porównamy je z rzeczywistym czasem pokrycia obliczonym elementarnymi metodami. Skorzystamy z faktu, że dla prostego spaceru losowego X_t po $\mathbb{Z}$ startującego z zera oraz $\tau = \min\{t : X_t = -a \vee X_t = b\}$ dla $a, b > 0$ mamy $\mathbb{E}\tau = ab$. Aby znaleźć górne ograniczenie musimy obliczyć $\max_{a,b\in V} \mathbb{E}_a\tau_b$. Oczywiście wartość $\mathbb{E}_a\tau_b$ jest tym większa, im bardziej odległe od siebie są punkty a i b.

- Dla parzystych n najbardziej odległe są punkty 0 i $\frac{n}{2}$, wówczas aby obliczyć $\max_{a,b\in V} \mathbb{E}_a\tau_b$ możemy zauważyć, że spacer po $\mathbb{Z}_n$ startujący z zera zatrzymywany w momencie uderzenia w $\frac{n}{2}$ jest analogiczny do spaceru po $\mathbb{Z}$, startującego z zera i zatrzymywanego w momencie uderzenia w $\frac{n}{2}$ lub w $-\frac{n}{2}$. Zatem $\max_{a,b\in V} \mathbb{E}_a\tau_b = \frac{n^2}{4}$
- Dla nieparzystych n najbardziej odległe są punkty 0 i $\frac{n-1}{2}$, wówczas $\max_{a,b\in V} \mathbb{E}_a\tau_b = \frac{(n-1)(n+1)}{4}$.

Wówczas (zakładając na moment dla uproszczenia, że $2|n$) otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[Cov] \leq \frac{n^2}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \approx n^2 \log n$$

Aby znaleźć dolne ograniczenie rozważamy wartości $t^A_{\min}$ dla $A \subseteq V$. Ponieważ istota problemu stwarza konieczność rozważenia wszystkich możliwych zbiorów A i znalezienie optymalnego nie jest łatwe, ograniczymy się do intuicyjnych spostrzeżeń, które pozwolą wybrać rozsądny zbiór A, dający pewne oszacowanie z dołu. Ponieważ $t^A_{\min}$ jest funkcją wyłącznie najmniejszej odległości pomiędzy punktami w A, to bardziej optymalne są zbiory, gdzie wierzchołki są od siebie równo odległe. Po drugie, ponieważ wraz ze wzrostem liczby wierzchołków w A ograniczenie rośnie jedynie logarytmicznie, to wydaje się być rozsądniejszym wybieranie zbioru A, który ma mało wierzchołków, ale o dużych odległościach między nimi. Sprawdźmy zatem ograniczenie dla A - zbioru dwóch najbardziej oddalonych wierzchołków (zakładamy dla uproszczenia, że $2|n$). Mamy wtedy

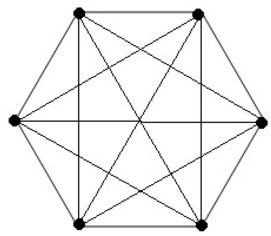
$$\mathbb{E}[Cov] \geq \frac{n^2}{4} \approx n^2$$

Dla porównania obliczymy $\mathbb{E}[Cov]$ elementarnymi metodami. Zaczynamy spacer z zera i określamy czas zatrzymania τ - chwila w której po raz pierwszy odwiedziliśmy każdy wierzchołek co najmniej raz (tzn. $\mathbb{E}[Cov] = \mathbb{E}\tau$). Niech X_t startuje z zera, tzn. $X_0 = 0$. Jeżeli oznaczymy przez τ_2 czas potrzebny do odwiedzenia nowego wierzchołka to oczywiście $\tau_2 = 1$, więc $\mathbb{E}\tau_2 = 1$. Załóżmy bez straty ogólności że drugim odwiedzonym przez nas wierzchołkiem jest 1 i oznaczmy przez τ_3 czas potrzebny do odwiedzenia kolejnego nowego wierzchołka. Musi nim być albo 2, albo $n-1$, a czas potrzebny na dotarcie do niego to (z faktu) $\mathbb{E}\tau_3 = 2$, gdyż jest to sytuacja analogiczna do prostego spaceru po $\mathbb{Z}$ startującego z 0 i zatrzymywanego w -2 lub 1. Analogicznie, załóżmy, że odwiedziliśmy już $k-1$ różnych wierzchołków i przez τ_k oznaczmy czas potrzebny do odwiedzenia kolejnego. Oczywiście już odwiedzone przez nas wierzchołki znajdują się obok siebie (tzn. jeżeli dwa wierzchołki x, y zostały przez nas odwiedzone, to zostały również odwiedzone wszystkie wierzchołki na jednym z łuków pomiędzy x i y). Bez straty ogólności możemy założyć że odwiedziliśmy wierzchołki od 0 do $k-2$ i znajdujemy się w $k-2$. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak wcześniej wnioskujemy, że czas potrzebny do odwiedzenia $k-1$ lub $n-1$ wynosi $\mathbb{E}\tau_k = k-1$. Nietrudno spostrzec, że:

$$\mathbb{E}[Cov] = \mathbb{E}\tau = \sum_{k=2}^{n} \tau_k = \sum_{k=2}^{n}(k-1) = \frac{n(n-1)}{2} \approx n^2.$$

2.2 Graf pełny rozmiaru n

Rozważamy prosty spacer losowy po grafie pełnym z n wierzchołkami. Każde dwa wierzchołki połączone są ze sobą krawędzią.



Rysunek 3: Graf pełny rozmiaru 6

Zauważmy, że wartość $\mathbb{E}_a\tau_b$ dla różnych a, b nie zależy od wyboru punktów. Zmienna τ_b ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{n-1}$, zatem $\mathbb{E}_a\tau_b = n-1$. Górne ograniczenie na czas pokrycia ma zatem postać

$$\mathbb{E}[Cov] \le (n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \approx n\log n$$

W przypadku dolnego ograniczenia, niezależnie od wyboru zbioru A mamy

$$t^A_{\min} = \min_{a,b\in A, a\neq b} \mathbb{E}_a\tau_b = \min_{a,b\in A, a\neq b} n-1 = n-1,$$

zatem wybieramy zbiór z największą liczba elementów (czyli $A = V$). Wówczas:

$$\mathbb{E}[Cov] \ge (n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \approx n\log n.$$

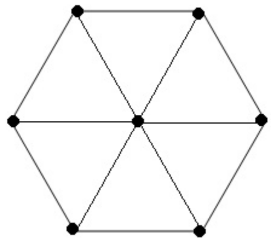
Ponieważ dolne i górne ograniczenia pokrywają się, to wnioskujemy, że jest to dokładny czas pokrycia. Obliczmy dla porównania dokładną wartość $\mathbb{E}[Cov]$ elementarnymi metodami. Załóżmy, że startujemy z dowolnego wierzchołka i oznaczmy przez τ_2 czas potrzebny na odwiedzenie kolejnego. Oczywiście $\tau_2 = 1$. Mając odwiedzone 2 różne wierzchołki, oznaczmy przez τ_3 czas potrzebny na odwiedzenie trzeciego. W każdej chwili prawdopodobieństwo trafienia w nowy wierzchołek jest takie samo i wynosi $\frac{n-2}{n-1}$, zatem zmienna τ_3 ma rozkład geometryczny z takim właśnie parametrem. Zatem $\mathbb{E}\tau_3 = \frac{n-1}{n-2}$. Analogicznie, gdy odwiedziliśmy już $k-1$ różnych wierzchołków i przez τ_k oznaczymy czas potrzebny do odwiedzenia kolejnego, to τ_k ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{n-k+1}{n-1}$, zatem $\mathbb{E}\tau_k = \frac{n-1}{n-k+1}$. Nietrudno spostrzec, że:

$$\mathbb{E}[Cov] = \sum_{k=2}^{n}\tau_k = \sum_{k=2}^{n}\frac{n-1}{n-k+1} = (n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Oczywiście wynik pokrywa się z wcześniejszymi szacowaniami.

2.3 $\mathbb{Z}_n$ ze środkiem

Rozważamy prosty spacer losowy po grafie jak na rysunku poniżej. Aby wyznaczyć górne oszacowanie na czas pokrycia, należy znaleźć $\mathbb{E}_a\tau_b$ dla a, b - przeciwległych wierzchołków na wielokącie.



Rysunek 4: $\mathbb{Z}_6$ ze środkiem

Załóżmy dla uproszczenia, że rozważamy tylko parzyste wartości n. Ponieważ rozważamy prosty spacer losowy, to wszystkie krawędzie mają jednakową przepustowość (w dalszych rozważaniach wyznaczymy jej dokładną wartość). Skorzystamy z twierdzenia 1. Podłączamy napięcie do punktów a i b, tak że $v(b) = 0$, a $v(a)$ jest dobrane tak, aby przez układ płynął prąd jednostkowy, tzn. $v(a) = R_{\text{eff}}$. Zauważmy, że wartości $v(x)$ zmieniają się liniowo wraz ze zmianą $v(a)$ (co wynika z własności funkcji harmonicznych), zatem możemy przyjąć $v(a) = 1$ i korzystając z twierdzenia powiedzieć, że:

$$\mathbb{E}_a\tau_b = R_{\text{eff}} \sum_{x\in V} \pi(x)v(x)$$

Oznaczmy punkt środkowy jako s. Zauważmy, że π przyjmuje tylko dwie wartości (wynika to z symetrii) - oznaczmy je jako π_s dla punktu środkowego oraz π_b dla każdego z punktów brzegowych. Spełniają one układ równań:

$$\begin{cases} \pi_s = \frac{n\pi_b}{3} \\ \pi_s + n\pi_b = 1 \end{cases}$$

Równania wynikają bezpośrednio z własności miary stacjonarnej. Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} \pi_s = \frac{1}{4} \\ \pi_b = \frac{3}{4n} \end{cases}$$

Z symetrii wynika ponadto, że $v(s) = \frac{1}{2}$, zatem:

$$\mathbb{E}_a\tau_b = R_{\text{eff}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4n} \sum_{x\in V, x\neq s} v(x) \right)$$

Aby wyznaczyć tę sumę, oznaczmy wartości jak na rysunku i zauważmy, że ponieważ $v(x)$ jest harmoniczna, to otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = \frac{1}{3}\left(v_0 + v_2 + \frac{1}{2}\right) \\ v_2 = \frac{1}{3}\left(v_1 + v_3 + \frac{1}{2}\right) \\ ... \\ v_{n-1} = \frac{1}{3}\left(v_{n-2} + v_n + \frac{1}{2}\right) \\ v_n = 0 \end{cases}$$

Oznaczmy $v^* = v_0 + ... + v_n$. Wówczas poprzez zsumowanie wszystkich równań stronami, dodanie i odjęcie poszczególnych składników otrzymujemy:

$$v^* = \frac{1}{3}\left(3 + v^* - v_{n-1} - v_n + v^* - v_0 - v_1 + \frac{n-1}{2}\right)$$

Ponieważ $v_0 = 1$, $v_n = 0$, a $v_1 + v_{n-1} = 1$ co wynika z symetrii, to:

$$v^* = \frac{n+1}{2}$$

Ponieważ $\sum_{x \in V, x \neq s} v(x) = 2v^* - v_0 - v_n$ to:

$$\sum_{x \in V, x \neq s} v(x) = n$$

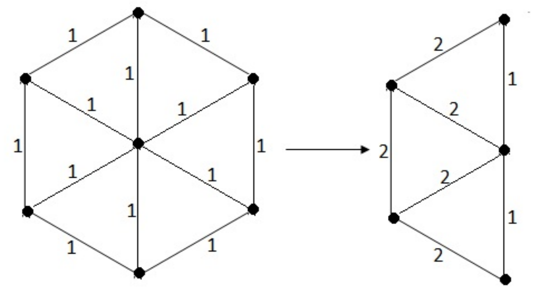
Podstawiając otrzymany wynik do wcześniejszego wyrażenia otrzymujemy:

$$\mathbb{E}_a \tau_b = \frac{7}{8} R_{\text{eff}}$$

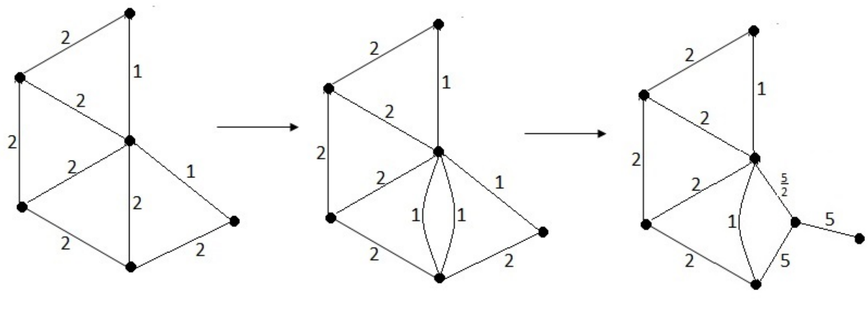
W celu wyznaczenia oporu efektywnego musimy znaleźć dokładną wartość przepustowości krawędzi. Zgodnie z definicją z rozdziału 1.2 określamy dla krawędzi łączących środek s z zewnętrznymi wierzchołkami b (a za razem dla wszystkich innych) przepustowość

$$C = \pi_s P(s,b) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{4n}$$

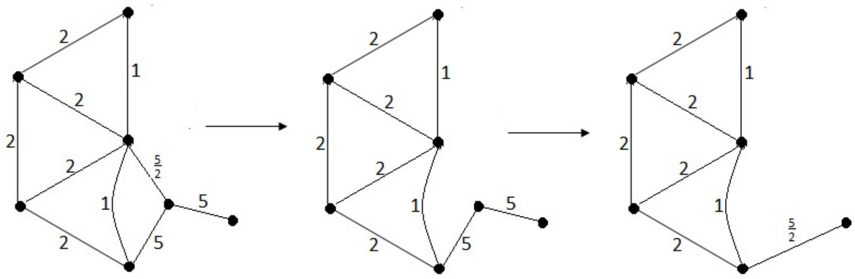
Ponieważ obliczenie dokładnej wartości oporu efektywnego jest trudne dla dużych n, oszacujemy go rekurencyjnie. Załóżmy dla uproszczenia, że rozważamy tylko parzyste wartości n. Dla ułatwienia zapisu załóżmy, że przepustowości są jednostkowe. Oznaczmy efektywny opór grafu rozmiaru n jako R_n (to znaczy grafu posiadającego w sumie $n+1$ wierzchołków). Chcemy wyznaczyć wartość R_{n+2}. Zauważmy po pierwsze, że przy rozważaniu R_n możemy utożsamić wierzchołki leżące po przeciwnych stronach pionowej osi, aby otrzymać prostszy graf, co przedstawia rysunek. Ponieważ otrzymaliśmy połączenia równoległe pomiędzy punktami, to drogi pomiędzy poszczególnymi punktami mają przepustowości równe sumie wcześniejszych. Na każdym z rysunków oznaczono przy krawędziach ich przepustowości.



Rozważmy teraz podobnie zredukowany graf rozmiaru $n+2$. Poprzez rozdzielenie jednej krawędzi na dwie połączone równolegle, a następnie zastosowanie transformacji gwiazda-trójkąt, otrzymujemy następujący układ:



Z prawa monotoniczności Rayleigha wynika, że usunięcie dowolnej krawędzi powoduje wzrost oporu efektywnego. Usuńmy więc "przeszkadzającą w obliczeniach" krawędź, a pozostałe dwie połączone szeregowo - zredukujmy.



Zauważmy teraz, że wewnątrz otrzymanego układu możemy dostrzec graf rozmiaru n, który zgodnie z założeniem ma opór efektywny R_n. Możemy zatem zastąpić go jedną krawędzią o przepustowości $\frac{1}{R_n}$, co po zastosowaniu kolejnej redukcji prowadzi nas do rezultatu:

$$R_{n+2} \geq R_n + \frac{2}{5}$$

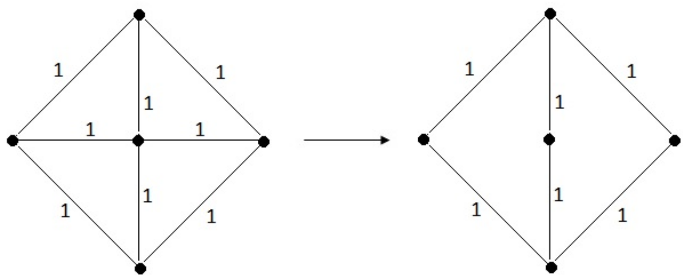
Ponieważ jednak założyliśmy jednostkowe przepustowości, a naprawdę krawędzie mają przepustowości $\frac{1}{4(n+1)}$, to:

$$R_{n+2} \geq R_n + \frac{8(n+1)}{5}$$

Rozważmy teraz ciąg określony rekurencyjnie: $Q_4 = R_4$ oraz $Q_{n+2} = Q_n + \frac{8n+8}{5}$ dla $n \geq 4$. Dla każdego n zachodzi wtedy $Q_n \geq R_n$. Możemy wyznaczyć bezpośrednio wzór na Q_n:

$$Q_n = R_4 + \frac{8}{5} \sum_{k=4,2|k}^{n-2} (k+1) = R_4 + \frac{8}{5} \sum_{k=2}^{\frac{n}{2}-1} (2k+1) = R_4 + \frac{8}{5} \left(\frac{n^2}{4} - 4 \right)$$

Pozostaje nam wyznaczyć R_4. Rozważmy $\mathbb{Z}_4$ ze środkiem i załóżmy, że krawędzie mają jednostkowe przepustowości. Z symetrii wynika, że trzy punkty mają potencjał $\frac{1}{2}$, więc możemy usunąć krawędzie między nimi, ponieważ nie popłynie przez nie prąd. Następnie zauważamy kolejno szeregowe i równoległe połączenia krawędzi:

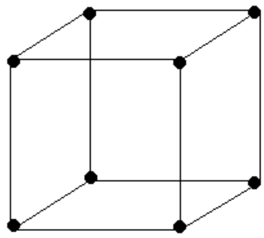


Zatem opór tego układu wynosi $\frac{2}{3}$. Ponieważ naprawdę krawędzie mają przepustowości $\frac{1}{16}$ (co wynika z wcześniejszych obliczeń), to wszystkie opory mają 20-krotnie większe wartości, tzn. $R_4 = \frac{40}{3}$. Ostatecznie otrzymujemy oszacowanie z góry na czas pokrycia grafu:

$$\mathbb{E}[Cov] \leq \frac{7}{8} \left(\frac{40}{3} + \frac{8}{5} \left(\frac{n^2}{4} - 4 \right) \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx n^2 \log n$$

2.4 n-wymiarowa kostka

Rozważamy prosty spacer po n-wymiarowej kostce, tzn. $\{0,1\}^n$. Dowolny punkt możemy utożsamić z n-elementowym ciągiem zerojedynkowym, a w każdym kroku z jednostajnym prawdopodobieństwem losujemy jedną ze współrzędnych i zamieniamy 0 na 1 lub 1 na 0.



Rysunek 5: Trójwymiarowa kostka

Aby wyznaczyć dolne ograniczenie na czas pokrycia musimy wyznaczyć $\max_{a,b\in V} \mathbb{E}_a\tau_b$. W tym przypadku maksimum jest realizowane dla $a =< 0,...,0 >$ oraz $b =< 1,...,1 >$. Skorzystamy z twierdzenia. Do punktów a i b podłączamy napięcie, tak aby $v(b) = 0$, a przez układ płynął prąd jednostkowy. Musimy w tym celu obliczyć opór efektywny układu. Ponieważ mamy do czynienia z prostym spacerem losowym, to każda krawędź ma jednakową przepustowość: $C(x,y) = \pi(x)P(x,y)$. Miara stacjonarna na $\{0,1\}^n$ jest jednostajna, więc $\pi(x) = \frac{1}{2^n}$. Ponadto z każdego punktu wychodzi n krawędzi, zatem $P(x,y) = \frac{1}{n}$. Stąd $C(x,y) = \frac{1}{n2^n}$. Rozważmy na $\{0,1\}^n$ normę

$$\| x \| = \sum_{k=1}^{n} x_i$$

dla $x =< x_1,...,x_n >$. Z symetrii wynika, że jeżeli $\| x \| = \| y \|$, to $v(x) = v(y)$, ponieważ punkty te mają taką samą liczbę jedynek na współrzędnych, a co za tym idzie prawdopodobieństwo uderzenia w a przed uderzeniem w b jest dla tych punktów takie samo. Możemy zatem utożsamić wierzchołki o równych normach, redukując problem do spaceru po zbiorze $\{0,1,...,n\}$. Otrzymujemy układ, w którym mamy $n+1$ punktów z wieloma krawędziami łączącymi kolejne poziomy. Ponieważ są to połączenia równoległe możemy zastąpić krawędzie między poziomami $k-1$ i k jedną krawędzią o przepustowości będącej sumą tamtych. Na poziomie k utożsamiamy ze sobą $\binom{n}{k}$ wierzchołków (jest ich tyle gdyż na tyle sposobów możemy rozmieścić k jedynek na n miejscach) i z każdego z nich możemy na poziom $k-1$ przejść k krawędziami (gdyż przejście na niższy poziom następuje po zamianie jedynki na zero, a w każdym punkcie jest k jedynek). Zatem przepustowość między poziomami $k-1$ i k wynosi $k\binom{n}{k}$. Otrzymujemy układ połączony szeregowo, zatem opór efektywny układu wynosi:

$$R_{\text{eff}} = n2^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}}$$

Jeżeli położymy $v(a) = R_{\text{eff}}$ to przez układ popłynie prąd o natężeniu 1, więc możemy skorzystać z twierdzenia. W dalszym toku rozumowania nie utożsamiamy już wierzchołków o takiej samej normie. Ponieważ miara stacjonarna na $\{0,1\}^n$ jest jednostajna, to:

$$\mathbb{E}_a\tau_b = \sum_{x\in V} \pi(x)v(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in V} v(x)$$

Zauważmy teraz, że z symetrii wynika, że dla $x,y \in \{0,1\}^n$, takich że dla każdego i zachodzi $x_i+y_i = 1$, mamy $v(x) = v(a) - v(y)$, czyli $v(x) + v(y) = v(a)$. Ponieważ dla każdego x istnieje dokładnie jeden taki y, to wierzchołki możemy dobrać parami, tak aby ich potencjały sumowały się do $v(a)$. Ponieważ wszystkich wierzchołków jest 2^n, to:

$$\mathbb{E}_a\tau_b = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in V} v(x) = \frac{1}{2^n}v(a)2^{n-1} = \frac{R_{\text{eff}}}{2} = \frac{n2^n}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\binom{n}{k}}$$

Zatem górne ograniczenie na czas pokrycia ma postać:

$$\mathbb{E}[Cov] \leq n2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k}.$$

W sumie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}}$ pierwszy i ostatni składnik wynoszą zawsze $\frac{1}{n}$, natomiast pozostałe składniki są rzędu $\frac{1}{n^2}$ lub niższego, więc asymptotycznie suma ta zachowuje się jak $\frac{2}{n}$. Ostatnia suma zachowuje się jak $\log 2^n$, czyli $n \log 2$. Asymptotycznie zatem:

$$\mathbb{E}[Cov] \leq n2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \approx n2^n \log 2$$

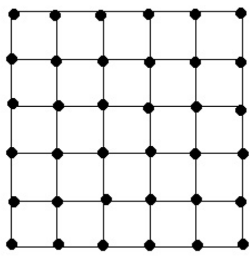
Biorąc A jako zbiór dwóch najbardziej odległych wierzchołków otrzymujemy też pewne ograniczenie z dołu:

$$\mathbb{E}[Cov] \geq n2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} \approx 2^n$$

Jest ono jednak oczywiste, jako że graf ma 2^n wierzchołków.

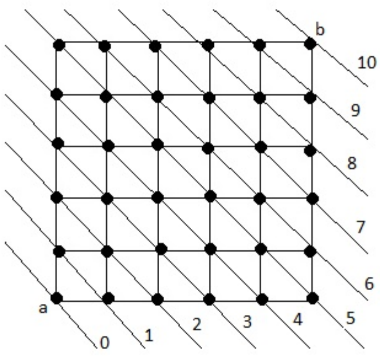
2.5 Krata rozmiaru n

Rozważamy prosty spacer losowy po kracie jak na rysunku poniżej. Aby znaleźć oszacowanie z góry na czas pokrycia, należy wyznaczyć $\mathbb{E}_a \tau_b$, gdzie a i b są przeciwległymi narożnikami kwadratu.

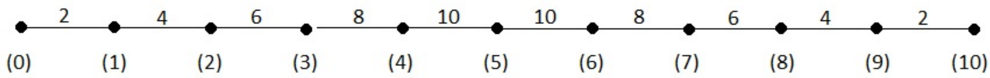


Rysunek 6: Krata rozmiaru 5

Ponieważ jest to prosty spacer losowy, to wszystkie krawędzie mają jednakową przepustowość - oznaczmy ją przez C. Z interpretacji probabilistycznej wynika, że potencjały punktów, które leżą na jednej prostej (jak na rysunku poniżej) są takie same, zatem możemy utożsamić te wierzchołki i nazwać je kolejnymi poziomami $0, 1, ..., 2n$, wg rysunku.



Redukujemy spacer do spaceru po zbiorze $\{0, ..., 2n\}$. Gdy znajdujemy się w danej chwili na poziomie k, to w kolejnym kroku znajdziemy się na poziomie $k-1$ lub $k+1$ (poza przypadkami brzegowymi). Aby obliczyć przepustowości pomiędzy kolejnymi poziomami, należy zauważyć, że utożsamienie wierzchołków powoduje że krawędzie między poziomami tworzą połączenie równoległe, więc możemy zsumować ich przepustowości, tzn. zastąpić je jedną krawędzią o przepustowości będącej sumą tamtych. Przepustowość między poziomem $k-1$, a k wynosi $2k$ dla $k \leq n$ oraz symetrycznie w przypadku $k \geq n$. Wartości (unormowane, tzn. nie uwzględniające wartości C) przedstawia rysunek poniżej:



Aby obliczyć $\mathbb{E}_a\tau_b$, skorzystamy z twierdzenia. Musimy wyznaczyć miarę stacjonarną oraz potencjały poszczególnych punktów gdy przez układ płynie prąd jednostkowy. Oznaczmy miarę stacjonarną na poziomie k przez π_k. Zauważmy, że z symetrii wynika, że $\pi_k = \pi_{2n-k}$. Oczywiście jej wartości spełniają następujący układ równań:

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{2}{2+4}\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 + \frac{4}{4+6}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{4}{2+4}\pi_1 + \frac{6}{6+8}\pi_3 \\ \dots \\ \pi_k = \frac{k}{2k-1}\pi_{k-1} + \frac{k+1}{2k+3}\pi_{k+1} \\ \dots \\ \pi_n = \frac{n}{2n-1}\pi_{n-1} + \frac{n}{2n-1}\pi_{n+1} = \frac{2n}{2n-1}\pi_{n-1} \\ \pi_0 + \dots + \pi_{2n} = 2\pi_0 + \dots + 2\pi_{n-1} + \pi_n = 1 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $\pi_1 = 3\pi_0$, następnie z drugiego - $\pi_2 = 5\pi_0$, z trzeciego - $\pi_3 = 7\pi_0$ itd. Wysuwamy hipotezę $\pi_k = (2k+1)\pi_0$ dla $k \leq n-1$. Sprawdzamy, czy spełniona jest równość:

$$\pi_k = \frac{k}{2k-1}\pi_{k-1} + \frac{k+1}{2k+3}\pi_{k+1} = \frac{k}{2k-1}(2k-1)\pi_0 + \frac{k+1}{2k+3}(2k+3)\pi_0 = (2k+1)\pi_0$$

Zatem $\pi_k = (2k+1)\pi_0$ dla $k \leq n-1$. Natomiast $\pi_n = 2n\pi_0$. Pozostaje wyliczyć wartość π_0 z ostatniego równania:

$$1 = 2\sum_{k=0}^{n}[\pi_k] - \pi_n = 2\sum_{k=0}^{n}[(2k+1)\pi_0] - 2n\pi_0$$

Skąd:

$$\pi_0 = \left(2\sum_{k=0}^{n}[2k+1] - 2n\right)^{-1} = \left(2 + 2\sum_{k=0}^{n} 2k\right)^{-1} = \left(2 + 4\frac{n(n-1)}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2(n^2+n+1)}$$

Możemy teraz wyznaczyć wartość C:

$$C = \pi_0 P(0,1) = \pi_0 = \frac{1}{2(n^2+n+1)} \approx \frac{1}{2n^2}$$

W celu wyznaczenia oporu efektywnego zauważmy, że krawędzie tworzą układ szeregowy. Wtedy:

$$R_{\text{eff}} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2kC} = \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx 2n^2\log n$$

Aby wyznaczyć $\mathbb{E}_a\tau_b$ podłączamy napięcie do punktów a i b, tak że $v(b) = 0$, a $v(a) = R_{\text{eff}}$ - wtedy przez układ płynie prąd jednostkowy i możemy skorzystać z twierdzenia. Zauważmy najpierw, że z symetrii wynika, że $v(n) = \frac{1}{2}$ oraz że dla $k \leq n$ mamy $v(k) = v(a) - v(2n-k)$, zatem:

$$\mathbb{E}_a\tau_z = \sum_{k=0}^{2n}\pi(k)v(k) = \pi(n)v(n) + \sum_{k=0}^{n-1}\pi(k)v(k) + \sum_{k=n+1}^{2n}\pi(k)v(k) =$$

$$= \pi(n)v(n)+\sum_{k=0}^{n-1}\pi(k)v(k)+\sum_{k=0}^{n-1}\pi(2n-k)v(2n-k) = \pi(n)v(n)+\sum_{k=0}^{n-1}\pi(k)v(k)+\sum_{k=0}^{n-1}\pi(k)[v(a)-v(k)] =$$

$$= \pi(n)v(n) + \sum_{k=0}^{n-1}\pi(k)v(a) = n\pi_0 + v(a)\pi_0\sum_{k=0}^{n-1}[2k+1] = n\pi_0 + v(a)\pi_0 n^2 = \frac{n+n^2 R_{\text{eff}}}{2(n^2+n+1)}$$

Ostatecznie ograniczenie z góry na czas pokrycia grafu ma postać:

$$\mathbb{E}[Cov] \leq \frac{n+n^2 R_{\text{eff}}}{2(n^2+n+1)}\sum_{k=1}^{n^2-1}\frac{1}{k} \approx \frac{n+n^2\cdot 2n^2\log n}{2(n^2+n+1)}\log n^2 \approx 2(n\log n)^2$$

Z drugiej strony natomiast, ponieważ graf ma n^2 wierzchołków, to:

$$\mathbb{E}[Cov] \geq n^2$$

.

Bibliografia

1. R. Lyons, Y. Peres, *Probability on trees and networks*, wyd. z 17 lipca 2010r.
2. P. Doyle, J. Snell, *Random walks and electric networks*, wyd. z 5 lipca 2006r.
3. D. Buraczewski, P.Dyszewski *Spacery losowe*, 2015
4. D. Levin, Y. Peres, E. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times*, 2009